وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

جامعة أبي بكر بلقايد –تلمسان–

كلية العلوم الاقتصادية, التجارية و علوم التسيير

مطبوعة حول:

أساسيات في بحوث العمليات

محاضرات وأعمال موجهة

موجهة لطلبة السنة الثانية ليسانس

من اعداد: د.كرزابي زوليخة سامية

أستاذة محاضرة –أ–

السنة الجامعية: 2023–2024

قائمة المحتويات

المحور التمهيدي

1)تعريف أساليب بحوث العمليات

2)التطور التاريخي لأساليب بحوث العمليات

3) منهج بحوث العمليات

4) مجالات استخدام بحوث العمليات

5)نماذج بحوث العمليات

المحور التمهيدي

1)مفهوم بحوث العمليات:

بحوث العمليات هي مجموعة من الطرق و الأساليب العلمية المساعدة على اتخاذ القرار في الإدارة و هي تعتمد على القياس الكمي بهدف البحث عن أمثلية تسيير الموارد المالية و البشرية و من أبرز التعاريف التي يعتمد عليها معظم الاختصاصيين في بحوث العمليات التعريف الذي اعتمدته جمعية بحوث العمليات البريطانية كالتالي: "استخدام الأساليب العلمية لحل المشاكل المعقدة في إدارة الأنظمة الكبيرة من المعدات, المواد الأولية, القوى العاملة ....الخ

أما جمعية بحوث العمليات الامريكية فقدمت تعريفا لبحوث العمليات كالتالي: "تهتم بحوث العمليات بالقرارات العلمية و ذلك بالاستعمال الأمثل للموارد المتاحة في مجالات متنوعة".

يعرف الحل الأمثل لأي مسالة بالحل الذي نختاره من بين عدد كبير من الحلول أو البدائل التي يمكن لها ان تحقق جميع الشروط و القيود الموضوعية للمشكلة.

تعتبر بحوث العمليات فنا و علما على السواء , فالفن يتمثل في القدرة على تحويل المشكلة المدروسة الى نموذج رياضي يأخذ بعين الاعتبار الهدف الذي نسعى اليه و هو الحل الأمثل. و يعتبر علم كونه بتمثل في إيجاد الطرق الرياضية المناسبة لحل النماذج.

و على ضوء ما تقدم يمكن ان نعرف بحوث العمليات على انها مجموعة من الأساليب الرياضية التي تساعد على اتخاذ القرار و ذلك بالاستعمال الأمثل للموارد و البدائل المتاحة.

2)التطور التاريخي لبحوث العمليات:

تعتبر بحوث العمليات من العلوم التطبيقية الحديثة التي أحرزت تطبيقاتها نجاحا واسعا في مختلف مجالات الحياة , و سميت بحوث العمليات لكون أولى البحوث في هذا المجال في العمليات الحربية , خلال الحرب العالمية الثانية عندما دعت الإدارة العسكرية الإنجليزية فريقا من العلماء من جامعة مانشيستر لدراسة المشاكل التقنية و الاستراتيجية المتعلقة بالدفاع الجوي و البري و ذلك بالاستخدام الأفضل للموارد الحربية المحدودة بالضافة الى دراسة استخدام الردار الذي اكتشف حديثا في ذلك الوقت.

و نظرا للنجاح الذي لقيه هذا الأسلوب في إدارة العمليات الحربية فقد تم نقلة للإدارة المدنية و خاصة إدارة الاعمال و المشاريع الاقتصادية ، و قد قام فريق من الباحثين في بريطانيا بإنشاء نادي بحوث العمليات سنة 1948 م .

ساهم الكثير من رواد الإدارة مثل: فريديريك تايلور , هنري فايول, و جلبرت, باستخدام الطرق العلمية في الإنتاج و تطبيق مبدأ التخصيص. كما استخدم غانت الرسومات البيانية لتوضيح الاعمال المختلفة للمشاريع وتسيير الوقت بظهور أسلوب تقييم البرامج و معالجة التقنيات المعروف بأسلوب

كما طور جورج دانتزيغ سنة 1949م طريقة لحل مشاكل التعظيم و التدنئة بأسلوب البرمجة الخطية باستخدام طريقة السمبلكس، حيث استخدمت لأول مرة في شركات البترول الامريكية لتخطيط الإنتاج.

ومما ساعد على التطور السريع في استخدام بحوث العمليات:

-توجه الكثير من العلماء بعد الحرب العالمية الثانية لتطوير أساليب و طرق بحوث العمليات.

-التطور الذي طرأ في مجال الحاسوب و الذي ساهم في مساعدة الباحثين على حل مسائل كبيرة كان يصعب حلها من قبل.

3) منهج بحوث العمليات:

تعتمد بحوث العمليات على المنهج العلمي ابتداءا من بناء النموذج الى حله ثم اختباره , و ذلك بالمرور بالمراحل التالية:

-تحديد المشكلة وتحليلها.

-بناء النموذج الرياضي المناسب و الذي يتماشى مع طبيعة المشكلة.

-اختبار مدى صحة النموذج.

-إيجاد حل للنموذج.

-اختبار مدى مناسبة الحل.

-تنفيذ خطة الحل المتوصل اليه بعد الخطوات المنهجية التي لا بد من المرور بها لحل أي مشكل علمي في الإدارة الاقتصادية للموارد.

4) مجالات استخدام بحوث العمليات:

لقد توسع هذا العام ليشمل مجالات مختلفة كما يلي:

-المجال الإداري: بحيث يوفر هذا العلم المعلومات الازمة لاتخاذ القرار المناسب في الوقت المناسب.

-في مجال الإنتاج والتصنيع بأقل تكلفة ممكنة أو اعظم ربح ممكن.

-في مجال التوزيع و النقل باقل تكلفة

-في مجال التعيين و ذلك باختيار الشخص المناسب للوظيفة الملائمة.

-في مجال التخطيط من خلال متابعة المشاريع واعداد الخطط الزمنية لتنفيذ المشاريع المختلفة.

وبالتالي فان بحوث العمليات تستخدم في جميع المجالات اذا توفرت المعلومات و الشروط التي تنطبق على نماذج بحوث العمليات.

5) نماذج بحوث العمليات:

النموذج الرياضي هو تبسيط للواقع الاقتصادي أو غيره و ذلك من خلال علاقات رياضية التي تعبر عن العلاقات بين المتغيرات الاقتصادية التي تساعد متخذ القرار على اتخاذ القرار الأمثل بعد دراسة جميع العوامل المؤثرة عليه.

يمكن تصنيف النموذج حسب درجة التأكد لنوعين:

-النماذج المحددة: وهي التي لا تأخذ بعين الاعتبار التغير في الزمن و قيم معاملات النموذج معروفة.

-النماذج الاحتمالية: هي التي تتغير من فترة لأخرى و معاملات النموذج غير معروفة و لا يمكن التنبؤ بها بدقة.

ان استخدام بحوث العمليات يقوم على بناء نماذج رياضية التي تتيح لمتخذ القرار تبسيط الواقع للحصول على الحل الأمثل.

يمكن تلخيص بعض نماذج بحوث العمليات في الجدول التالي:

النماذج الاحتمالية	النماذج المختلطة	النماذج المحددة
-صفوف الانتظار	-البرمجة الديناميكية	-البرمجة الخطية
-تحليل ماركوف	-نماذج المخزون	-البرمجة الغير الخطية
-نظرية الالعاب	-تقييم و مراجعة المشروعات PERT	-مسائل النقل و التخصيص
	-CPM طريقة المسار الحرج	-البرمجة الأعداد الصحيحة
	-أسلوب المحاكاة	-البرمجة بالأهداف

المحور الأول: نموذج البرمجة الخطية

1) مفهوم البرمجة الخطية

2) مجالات استخدام البرمجة الخطية

3) الصيغة الرياضية لنموذج البرمجة الخطية

4) الصيغة القانونية لنموذج البرمجة الخطية

لمحور الأول: نموذج البرمجة الخطية

1)مفهوم البرمجة الخطية:

البرمجة الخطية هي أحد الأساليب الرياضية التي تبحث عن أفضل الطرق للاستخدام الأمثل للموارد المتاحة ، عن طريق تحويل المشكلة المدروسة إلى علاقات رياضية خطية، بهدف تعظيم الربح أو تدنئه التكاليف.

البرنامج الخطي هو صيغة رياضية مشتقة من مشكلة معينة , هدفها البحث عن الأمثلية عن طريق معادلات رياضية تتكون من مجموعة من المتغيرات من الدرجة الأولى , في وجود مجموعة من القيود تكون في شكل معادلات أو متراجحات .

2) مجالات استخدام نموذج البرمجة الخطية:

تستخدم البرمجة الخطية في كل المسائل الاقتصادية التي تهدف الى البحث على أمثلية استخدام القيود المالية و التقنية للمؤسسة , و أهم المجالات التي تستخدم فيها البرمجة الخطية ما يلي:

-تعظيم الأرباح

-تدنئة التكاليف

-تعظيم الإنتاج, طاقات التخزين

-تعظيم رؤوس الأموال

-تعظيم استخدام اليد العاملة

-تدنئة عدد الموظفين

كما تستخدم البرمجة الخطية في الكثير من مجالات الإدارة و اتخاذ القرارات.

3)الصيغة الرياضية لنموذج البرمجة الخطية:

يقصد ببناء النموذج الخطي تحويل المشكلة المدروسة الى علاقات خطية تكون على شكل معادلات او متراجحات .

يحتوي النموذج الخطي على مجموعة من العناصر كالتالي:

أ)المتغيرات: تدعى بمتغيرات القرار، و هي القيم التي يجب تحديد قيمتها للوصول إلى الهدف,

هذه المتغيرات عادة عن كمية انتاج معينة , X_j, حيث jتعبر عدد المتغيرات في المسألة.

يرمز لها ب

ب)دالة الهدف: تسمى أيضا بالدالة الاقتصادية و هي تعبر عن الهدف الذي تسعى اليه المؤسسة للوصول الى تعظيم الأرباح أو تدنئة التكاليف. نرمز لدالة الهدف بz.

تصنف دالة الهدف الى مجموعتين:

1-حالة التعظيم: و يقصد بها تحقيق أكبر ربح ممكن , و يرمز لها ب:

$$\text{Max } [Z] = \sum_{j=1}^{n} \text{Cj Xj}$$

$$\text{Max}[Z]=C_1X_1+C_2X_2+C_3X_3+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+C_nX_n$$

بحيث:

n : عدد متغيرات

X_j: هي متغيرات القرار.

C_j: ربح كل وحدة من X (الربح الوحدي).

2-حالة التدنئة: و يقصد بها تحقيق أقل الخسائر ، في هذه الحالة نرمز لدالة الهدف ب:MinZ.

$$\min[Z] = \sum_{i=1}^{n} C_i X_i$$

$$\text{Min}[Z]=C_1X_1+C_2X_2+C_3X_3+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+C_nX_n$$

بحيث :

X_i: هي متغيرات القرار.

n : عدد متغيرات القرار.

C_i: تكلفة كل وحدة من X (التكلفة الوحدوية).

ج)القيود: تسمى أيضا بالشروط الموضوعية أو الخطية , و هي عبارة عن مجموعة من المتراجحات او المعادلات , و تعير عن كمية الموارد المتاحة لدى المؤسسة (أي ما تحتاج إليه كل وحدة إنتاج).و تأخذ الأشكال التالية:

- $\sum_{i=}^{n} aijXi \geq bj$ /j={1,2 ,…….a}
- $\sum_{i=}^{n} aijXi \leq b_j$/ j={a+1,………,b}
- $\sum_{i=}^{n} aijXi = b_j$ /j={b+1,……..,m}

بحيث: **j={1,2,3………..,m }**

a_{ij} : المعامل التقني (ما يتم استخدامه لإنتاج وحدة واحدة من المنتوج x)

b_j : كمية المورد المتاحj

x_i: يمثل متغيرات القرار

د)شرط عدم السلبية: بما اننا نتكلم عن الكميات فان كل متغيرات القرار تكون أكبر أو تساوي الصفر, و لا يمكن أن تكون سالبة, الا في حالات خاصة أين تشترط معالجة خاصة أثناء سيرورة الحل. و يعبر على شرط عدم السلبية كما يلي: $x_i \geq 0$ /i=1,……n

مثال رقم 01: مؤسسة تقوم بإنتاج نوعين من الطاولات A وB, كل نوع من الطاولات يمر بورشتين.

الوقت المطلوب لكل وحدة منتجة في كل ورشة، و الربح المحقق لكل وحدة من الطاولات المنتجة مبين في الجدول التالي:

المنتجات / الورشات	A	B	الوقت المتاح
الورشة 1	4	5	70
الورشة 2	10	6	60
ربح الوحدة	3	6	

المطلوب: بناء نموذج البرمجة الخطية للمؤسسة؟

الحل: نموذج البرمجة الخطية:

1)متغيرات القرار: x_1 الكمية المنتجة من الطاولة A

x_2: الكمية المنتجة من الطاولة B

2)دالة الهدف:

$$\text{Max}\ [Z] = 3x_1 + 6x_2$$

3)القيود:

$$s/c \begin{cases} 4x_1 + 5x_2 \leq 70 \\ 10x_1 + 6x_2 \leq 60 \end{cases}$$

4) شرط عدم السلبية:

$$x_i \geq 0 \ / \ i = \{1,2\}$$

مثال رقم 02: يريد صاحب مصنع تحضير وجبة غذائية مؤلفة من نوعين من الطعام، في تركيبها ثلاثة مقومات رئيسية C,B,A.

- يتوجب على الزبون أن يحصل على80 وحدة يوميا على الأقل من A، و 120 وحدة على الأقل من B، و100 وحدة على الأقل من C.
- الكلغ الواحد من النوع الأول من الطعام يحتوي على 40 وحدة من A، و 60 وحدات من B، و 10 وحدات من C.
- الكلغ الواحد من النوع الثاني يحتوي على 10 وحدات من A، و 40 وحدة من B، و 20 وحدة من C.

المطلوب: أوجد نموذج البرمجة الخطية ، بحيث يسعى صاحب المصنع إلى إيجاد طريقة يستطيع من خلالها إعداد هذه الوجبة بأقل تكلفة ، مع العلم أن تكلفة الكلغ الواحد من النوع الأول 120 دج، أما تكلفة الكلغ الواحد من النوع الثاني تعادل 180 دج؟

حل المثال 02: نموذج البرمجة الخطية :

1)متغيرات القرار:

X_1:الكمية المحضرة من النوع الأول من الطعام

X_2 :الكمية المحضرة من النوع الثاني من الطعام.

2) دالة الهدف:

$$\text{Min } z = 120\, x_1 + 180\, x_2$$

3) القيود:

$$s/c \begin{cases} 40x_1 + 10x_2 \geq 80 \\ 60x_1 + 40x_2 \geq 120 \\ 10x_1 + 20x_2 \geq 1000 \end{cases}$$

4) شرط عدم السلبية:

$$x_i \geq 0 \;/\; i = \{1,2\}$$

مثال رقم 03: ترغب إحدى منظمات الأعمال بوضع خطة لإنتاج ثلاثة أنواع من المنتجات C,B,A. وذلك من خلال استغلال الطاقة التشغيلية لثلاثة أنواع من الآلات (الآلة 1، الآلة 2، الآلة 3). الجدول التالي يبين الطاقة التشغيلية لكل نوع من المنتجات :

المنتجات / الآلات	A	B	C

الآلة 1	4 سا	2 سا	3 سا
الآلة 2	3 سا	5 سا	2 سا
الآلة 3	–	–	1 سا

- الساعات المتاحة أسبوعيا للآلة 1 هي 70 ساعة ، و الآلة 2 هو 50 ساعة.
- الساعات المتاحة أسبوعيا للآلة 3 تشتغل بكاملها و تساوي 10 ساعات .
- الأرباح المتوقعة للمنتجات C,B,A على التوالي : 10، 8، 12 دج.

المطلوب : صياغة نموذج البرمجة الخطية؟

حل المثال 03 : نموذج البرمجة الخطية

1)متغيرات القرار: X_1 : الكمية المنتجة من المنتوج A

X_2: الكمية المنتجة من المنتوجB

X_3: الكمية المنتجة من المنتوجC

2) دالة الهدف:

$$\max[Z] = 10x_1 + 8x_2 + 12x_3$$

3) القيود:

$$s/c\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 70 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 \leq 50 \\ x_3 = 10 \end{cases}$$

4) شرط عدم السلبية:

$$x_i \geq 0 \ / \ i = \{1,2,3\}$$

مثال رقم 04:

أمام أحد التجار فرصة لتوزيع ثلاثة منتجات جديدة : ثلاجات، غسالات، سخانات، و يريد أن يعرف الكمية المثلى الموزعة لكل نوع، و التي تضمن له أقصى ربح.

- لدى هذا التاجر 45 مليون دج كطاقة متاحة للاستثمار، علما أن تكلفة الوحدة الواحدة من الثلاجات 2000 دج، و ثمن بيع الوحدة الواحدة ب 3500 دج.
- الغسالة الواحدة تشترى ب 950 دج، و تباع ب 1200 دج.
- السخان الواحد يشترى ب 400 دج، و يباع ب 650 دج.

- يشترط أن تكون الكمية المشتراة من السخانات تساوي 5000 وحدة و الكمية المشتراة من الثلاجات لا تقل عن 500 وحدة ، و كمية الغسالات لا تقل عن 1000 وحدة.

المطلوب : أوجد نموذج البرمجة الخطية الذي يحقق أقصى ربح؟

حل المثال 04 : نموذج البرمجة الخطية

1) متغيرات القرار: X_1: الكمية الموزعة من الثلاجات

X_2: الكمية الموزعة من الغسالات

X_3 : الكمية الموزعة من السخانات

2) دالة الهدف: يريد التاجر تعظيم ربح توزيع المنتجات الثلاثة و بالتالي نحسب ربح كل منتج.

سعر البيع=سعر الشراء=الربح الوحدوي

$$\max [Z] =(3500-2000)\, x_1 +(1200-950x_2\ )+(650 -400\ )x_3$$

$$\max[Z] = 1500x_1 + 250x_2 + 250x_3$$

3) القيود

$$s/c\begin{cases} 2000x_1 + 950x_2 + 400x_3 \leq 45.000.000 \\ x_3 = 5000 \\ x_1 \geq 500 \\ x_2 \geq 1000 \end{cases}$$

4) شرط عدم السلبية:

$$x_i \geq 0 \ / \ i = \{1,2,3\}$$

4) الصيغة القانونية لنموذج البرمجة الخطية:

هناك نوعان من صيغ البرامج الخطية القانونية و هي حسب الحالة كما يلي:

أ- **حالة التعظيم**: في هذه الحالة تكون الصيغة القانونية للبرنامج الخطي كما يلي:

* دالة الهدف تكون في حالة التعظيم:

$$max[Z] = \sum_{i=1}^{n} C_i X_i$$

* التشكيلة الخطية للقيود تكون في حالة أصغر أو تساوي

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}X_i \leq b_j$$

*شرط عدم السلبية: $X_i \geq 0$

مثال01: لدينا البرنامج الخطي التالي:

$$max[Z] = 5x_1 + 2x_2$$

$$s/c\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 9 \\ x_1 + x_2 \leq 2 \end{cases}$$

$$x_1 ، x_2 \geq 0$$

المطلوب : أكتب النموذج الخطي على الشكل القانوني؟

حل المثال01: الشكل القانوني (la forme canonique):

$$max[Z] = 5x_1 + 2x_2$$

$$s/c \begin{cases} -3x_1 - x_2 \leq -9 \\ x_1 + x_2 \leq 2 \end{cases}$$

$$x_1 ، x_2 \geq 0$$

ب- **حالة التدنئة**: في هذه الحالة نكون الصيغة القانونية للبرنامج الخطي كما يلي :

*دالة الهدف تكون في حالة التدنئة:

$$min[Z] = \sum_{i=1}^{n} C_i X_i$$

* التشكيلة الخطية لجميع القيود تكون في حالة أصغر أو تساوي.

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} X_i \geq b_j$$

* شرط عدم السلبية: جميع المتغيرات تكون غير سالبة $X_i \geq 0$

مثال02 : لدينا نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$\min[Z] = 2x_1 + 9x_2 + x_3$$

$$s/c \begin{cases} 2x_1 + 7x_3 \leq 10 \\ x_1 + 3x_3 \geq 7 \\ x_1 + 17x_2 + 15x_3 \geq 25 \end{cases}$$

$$x_1 ، x_2 ، x_3 \geq 0$$

المطلوب : أكتب نموذج البرمجة الخطية على الشكل القانوني ؟

حل المثال 02: الشكل القانوني:

$$\min[Z] = 2x_1 + 9x_2 + x_3$$

$$\begin{cases} -2x_1 - 7x_3 \geq -10 \\ x_1 + 3x_3 \geq 7 \\ x_1 + 17x_2 + 15x_3 \geq 25 \end{cases}$$

$$x_1 ، x_2 ، x_3 \geq 0$$

تمارين محلولة حول بناء نموذج البرمجة الخطية

تمرين رقم 01: مصنع للجلود يرغب في إنتاج نوعين من الحقائب : ممتازة و عادية

بعد دراسة جيدة لمراحل إنتاج هذه الحقائب ، اتضح أن إنتاج الحقيبة الواحدة يتطلب أربعة مراحل هي: 1) القص و صنع الجلود ،2) الخياطة، 3) الفحص، 4) التغليف

الزمن المستغرق بالساعات في كل مرحلة موضح في الجدول التالي:

مراحل الإنتاج / المنتجات	القص و الصبغ	الخياطة	الفحص	التغليف	الربح
حقيبة ممتازة	7/10	1/2	1	1/10	10
حقيبة عادية	1	5/6	2/3	1/4	09
الطاقة المتوفرة	630	600	708	135	-

لمطلوب: نموذج البرمجة الخطية

حل التمرين رقم 01: نموذج البرمجة الخطية:

1. متغيرات القرار: X_1: الكمية المنتجة من الحقائب الممتازة.

X_2: الكمية المنتجة من الحقائب العادية.

2. دالة الهدف: $\max[Z] = 10x_1 + 9x_2$

3. القيود:

$$s/c\begin{cases} 7/10x_1 + x_2 \leq 630 \\ 1/2x_1 + 5/6x_2 \leq 600 \\ x_1 + 2/3x_2 \leq 708 \\ 1/10x_1 + 1/4x_2 \leq 135 \end{cases}$$

4. شرط عدم السلبية:

$$x_i \geq 0 \ / \ i = \{1,2\}$$

تمرين رقم 02: تعاقدت إحدى المدارس الابتدائية مع إحدى المؤسسات الإنتاجية المتخصصة في صناعة المواد الغذائية ، تم الاتفاق على أن تحتوي على مجموعة من الفيتامينات كالتالي:

- فيتامينA بمقدار 40 وحدة.
- فيتامينB بمقدار 50 وحدة.
- فيتامينC بمقدار 49 وحدة.

إذا علمت أن هذه المؤسسة تنتج نوعين من المواد الغذائية و الجدول التالي يوضح مواصفات هتين المادتين:

المادة الغذائية / الفيتامينات	المادة الغذائية 1	المادة الغذائية 2
فيتامين A	2	4
فيتامين B	10	5
فيتامينC	7	7
تكلفة المادة الغذائية	8 دج	5 دج

المطلوب : بناء البرمجة الخطية؟

حل التمرين الثاني: نموذج البرمجة الخطية:

1. الترميز: x_1: عدد الوحدات من المادة الغذائية 1

x_2: عدد الوحدات من المادة الغذائية 2

2. دالة الهدف:

$$\min[Z] = 8x_1 + 5x_2$$

3. القيود:

$$s/c\begin{cases}2x_1 + 4x_2 \geq 40\\ 10x_1 + 5x_2 \geq 50\\ 7x_1 + 7x_2 \geq 49\end{cases}$$

4. شرط عدم السلبية:

$$x_i \geq 0 \;/\; i = \{1,2\}$$

التمرين رقم 03: تتمتع منتجات مؤسسة للأنسجة بسمعة تسويقية جيدة، و لذلك فإن المؤسسة بإمكانها بيع أي عدد من الوحدات التي يمكن إنتاجها، و لذا ترغب المؤسسة في إنتاج أكبر عدد من الوحدات في ظل القيود التي تفرضها الطاقة الإنتاجية و الطاقة التمويلية.

- تمر المنتجات بثلاثة أقسام للإنتاج C,B,A ، الجدول الموالي يوضح الساعات المستغرقة في كل قسم من الأقسام:

المنتجات	سعر البيع الوحدي	التكلفة الوحدية	عدد الساعات المطلوبة في كل قسم		
			A	B	C
المنتوج 1	14 دج	10 دج	0.5 سا	0.3 سا	0.2 سا
المنتوج 2	11 دج	8 دج	0.3 سا	0.4 سا	0.1 سا

- الطاقة القصوى للأقسام الثلاثة على التوالي: 500 سا، 400 سا، 200 ساعة.

- الأموال المتاحة للإنتاج تبلغ 30.000 دج

المطلوب : نموذج البرمجة الخطية؟

حل التمرين رقم 03:

1. الترميز: x_1: الكمية المنتجة من المنتوج 1

x_2: الكمية المنتجة من المنتوج 2

2. دالة الهدف:

$$\max[Z] = 4x_1 + 3x_2$$

3. القيود:

$$s/c \begin{cases} 0.5x_1 + 0.3x_2 \leq 500 \\ 0.3x_1 + 0.4x_2 \leq 400 \\ 0.2x_1 + 0.1x_2 \leq 200 \\ 10x_1 + 8x_2 \leq 30.000 \end{cases}$$

4. شرط عدم السلبية :

$$x_i \geq 0 \ / \ i = \{1,2\}$$

تمرين رقم 04: تمتلك إحدى المؤسسات مصنعا صغيرا للدهان، يقوم بإنتاج نوعين من طلاء البيوت. النوع الأول للطلاء الداخلي ، و الثاني للطلاء الخارجي.

- يدخل في تركيب كل نوع من الطلاء مادتين أساسيتين A و B.

- الجدول التالي يبين الكميات المتوفرة في الأسبوع من المادتين و الكمية اللازمة منها لإنتاج طن واحد من نوعي الطلاء.

المادة الأساسية	الكمية بالطن		الكمية المتوفرة
	الداخلي	الخارجي	
A	2	1	6
B	1	2	8

حسب البيانات التي جمعتها المؤسسة فإن هناك زيادة في الطلب على الطلاء الداخلي أكثر من الخارجي، و أن الزيادة لا تتجاوز طنا واحدا في الأسبوع.

الحد الأقصى للطلب على الطلاء الداخلي هو 2 طن/ أسبوعيا.

المطلوب: إذا كانت عائدات الطن الواحد من الطلاء 3 دج ، و الطلاء الخارجي 2 دج. أوجد نموذج البرمجة الخطية؟

حل التمرين رقم 04:

1. الترميز: x_1: الكمية المنتجة من الطلاء الداخلي

x_2: الكمية المنتجة من الطلاء الخارجي

2. دالة الهدف:

$$\max[Z] = 3x_1 + 2x_2$$

3. القيود:

$$s/c\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ x_1 - x_2 \leq 1 \\ x_1 \leq 2 \end{cases}$$

4. شرط عدم السلبية :

$$x_1 ، x_2 \geq 0$$

تمرين رقم 05: مصنع ينتج نوعين من الخيم الصغيرة و الكبيرة.

- تمر الخيم الصغيرة و الكبيرة بثلاثة مراحل للإنتاج : مرحلة القص ، مرحلة التجميع، مرحلة الفحص.
- يتطلب إنتاج الخيمة الصغيرة 1 ساعة عمل في مرحلة القص ، 1 ساعة عمل في مرحلة التجميع و 1 سا عمل في مرحلة الفحص.
- يتطلب إنتاج الخيمة الكبيرة 1 ساعة عمل في مرحلة القص ، 2 ساعة عمل في مرحلة التجميع و 0.5 سا عمل في مرحلة الفحص.
- الحد الأقصى للساعات المتوفرة في قسم القص 30 ساعة ، و قسم التجميع 40 ساعة
- طاقة مرحلة الفحص تبلغ 15 سا.

- الموزع لا يستطيع بيع أكثر 12 خيمة كبيرة.

المطلوب: بناء نموذج البرمجة الخطية علما أن ربح الخيمة الصغيرة 200 دج، و الخيمة الكبيرة 320 دج ؟.

حل التمرين رقم 05:

1. الترميز: x_1: الكمية المنتجة من الخيم الصغيرة

x_2: الكمية المنتجة من الخيم الكبيرة

2. دالة الهدف: $\max[Z] = 200x_1 + 320x_2$

3. القيود:

$$s/c\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 30 \\ x_1 + 2x_2 \leq 40 \\ x_1 + 0.5x_2 \leq 15 \\ x_1 \leq 12 \end{cases}$$

4. شرط عدم السلبية:

$$x_i \geq 0 \ / \ i = \{1,2\}$$

تمرين رقم 06 : مصنع ينتج ثلاثة منتجات A،B، C، كل منتوج يمر بثلاثة عمليات مختلفة: الزمن المستغرق لإنتاج وحدة واحدة من كل منتوج و الطاقة المتاحة لكل عملية (دقيقة / اليوم) ، و ربح الوحدة الواحدة لكل منتوج (ألف دينار) موضحة في الجدول التالي:

العمليات	الزمن المستغرق (الدقيقة)			الطاقة المتاحة
	A	B	C	
الأولى	1	2	1	340
الثانية	3	0	2	460
الثالثة	1	4	0	420

-	5 دج	2 دج	3 دج	الربح الوحدي

المطلوب:

1. صياغة نموذج البرمجة الخطية ؟

2. أعداد صياغة نموذج البرمجة الخطية لكل حالة من الحالات التالية:

الحالة الأولى: بافتراض قيام المصنع بإضافة منتوج رابع للعملية الإنتاجية، و الزمن المستغرق في العمليات الثلاثة هو (3 سا، 5 سا ،1 سا) على التوالي، ربح الوحدة الواحدة 6 آلاف دينار ،و أن الطاقة المتاحة للعملية الثالثة تستغل بكاملها.

الحالة الثانية: بإفتراض أن دراسات السوق أشارت إلى أن نسبة عدد الوحدات المنتجة من المنتوج A إلى عدد الوحدات المنتجة من المنتوجين B وC يجب أن لا تقل عن 0.4

حل التمرين رقم 06:

1- نموذج البرمجة الخطية:

1. الترميز: X_1: الكمية المنتجة من المنتوج A

X_2: الكمية المنتجة من المنتوج B

X_3 : الكمية المنتجة من المنتوج C

2. دالة الهدف: $\max[Z] = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3$

3. القيود:

$$s/c\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \le 340 \\ 3x_1 + 2x_3 \le 460 \\ x_1 + 4x_2 \le 420 \end{cases}$$

4. شرط عدم السلبية:

$$x_i \ge 0 \ / \ i=\{1,2,3\}$$

2-اعادة نموذج البرمجة الخطية:

الحالة الأولى:

$$\max[Z] = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 6x_4$$

$$s/c\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 340 \\ 3x_1 + 2x_3 + 5x_4 \leq 460 \\ x_1 + 4x_2 + x_4 = 420 \end{cases}$$

$$x_1 \text{ ،} x_2 \text{ ،} x_3 \text{ ،} x_4 \geq 0$$

الحالة الثانية:

$$\max[Z] = 3x_1 \quad 2x_2 + 5x_3$$

$$s/c\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 340 \\ 3x_1 + 2x_3 \leq 460 \\ x_1 + 4x_2 \leq 420 \\ \dfrac{x_1}{x_2 + x_3} \geq 0.4 \end{cases}$$

شرط عدم السلبية:

$$x_i \geq 0 \ / \ i=\{1,2,3\}$$

تمرين رقم 07: تتوفر إحدى المؤسسات على احتياطي من الكرتون يبلغ 10.000 متر مربع ، تنتج هذه المؤسسة نوعين من العلب المصنوعة من مادة الكرتون.

- يتطلب انتاج علبة واحدة من النوع الأول و النوع الثاني على التوالي 1 ، 2 متر مربع من الكرتون و 3، 2 دقائق من وقت التجميع ، علما أن الوقت المتاح من التجميع هو فقط 200 ساعة عمل في الأسبوع .

- يتم إلصاق هذه العلب باستخدام رزات سلكية ، حيث يتطلب إلصاق العلبة الواحدة من النوع الثاني أربعة أضعاف ما يتطلبه إلصاق العلبة الواحدة من النوع الأول علما أن مخزون الرزات السلكية المتاح كحد أقصى 15000 علبة من النوع الأول.

- إن أسعار بيع هذه العلب على التوالي 5،3 دج.

المطلوب : بناء نموذج البرمجة الخطية التي تعظم رقم أعمال هذه المؤسسة؟

حل التمرين رقم 07:

1. الترميز: x_1: عدد العلب المنتجة من النوع 1

x_2:عدد العلب المنتجة من النوع 2

2. دالة الهدف : $max[Z] = 5x_1 + 3x_2$

3. القيود:

$$s/c\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 10.000 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 200(60) \\ x_1 + 4x_2 \leq 15.000 \end{cases}$$

4. شرط عدم السلبية:

$$x_i \geq 0 \ / \ i=\{1,2\}$$

تمرين رقم 08: مؤسسة لإنتاج المنتجات البلاستيكية , تركز على انتاج منتجين p1, p2 , خلال السنة القادمة و ذلك لكثرة الطلب عليهما من جهة و قلة تكاليفهما من جهة أخرى . تستخدم المؤسسة لإنتاج هذين المنتجين مادتين خام هما : المادة الخام1 و المادة الخام 2 بكميات متفاوتة , بالإضافة الى ذلك تستخدم المؤسسة آلتين : الآلة 1 و الآلة 2. و الجدول ادناه يوضح استهلاك المواد الخام و كذا الوقت المستغرق على مستوى كل آلة.

	المادة الخام 1	المادة الخام 2	الآلة 1	الآلة 2
المنتج p1	01	05	02	00

المنتج p2	01	06	02	03

المؤسسة لا تتوفر الا على 400 وحدة من المادة الخام الأولى ,اما المادة الخام الأخرى فانها تستجيب لأي برنامج انتاجي. الطاقة القصوى للآلتين فهي على التوالي : 600 و 900 ساعة , و حسب مدير المبيعات لهذه المؤسسة فيجب على المؤسسة انتاج على الأقل 150 وحدة من المنتوج p1 . أما عن الربح المترتب عن المنتجين فهو على التوالي: 300 و 200دج.

المطلوب: صياغة نموذج البرمجة الخطية؟

حل التمرين رقم 08:

1)متغيرات القرار: x_1:الكمية المنتجة من المنتج p1

X_2: الكمية المنتجة من المنتج p2

2)دالة الهدف: $max[Z] = 300x_1 + 200x_2$

3)القيود:

$$s/c\begin{cases} x_1 + x_2 \le 400 \\ 2x_1 + 2x_2 \le 600 \\ 3x_2 \le 900 \\ x_1 \ge 150 \end{cases}$$

4)شرط عدم السلبية:

$$x_i \ge 0 \ / \ i=\{1,2\}$$

تمرين رقم 09: تقوم مؤسسة صناعية بإنتاج ثلاثة منتجات (1,2,3) باستعمال آلة تعمل 45 ساعة في الأسبوع , الايراد الناتج من انتاج وحدة واحدة من كل منتوج هو على التوالي:4ون, 12ون, 3ون.

المردود الساعي للآلة من كل منتوج هو 50 وحدة , 25 وحدة , 75 وحدة في الساعة.

من جهة أخرى حددت المبيعات الشهرية القصوى من كل منتوج على التوالي: 1000 وحدة , 500 وحدة و 1500 وحدة.

المطلوب: بناء نموذج البرمجة الخطية؟

حل التمرين رقم 09

1)متغيرات القرار: x_1:الكمية المنتجة من المنتج 1

X_2: الكمية المنتجة من المنتج 2

X_3:الكمية المنتجة من المنتج 3

2)دالة الهدف: $max[Z] = 4x_1 + 12x_2 + 3x_3$

3)القيود: لدينا المردود الالي لكل منتوج بالوحدات و بالتالي نحولها للساعات كما يلي:

-الآلة تتطلب 50 وحدة في الساعة و بالتالي وحدة واحدة من المنتوج الأول تتطلي 50/1 ساعة.

-الآلة تتطلب 25 وحدة في الساعة و بالتالي وحدة واحدة من المنتوج الثاني تتطلي 25/1ساعة.

-الآلة تتطلب 45 وحدة في الساعة و بالتالي وحدة واحدة من المنتوج الثالث تتطلب 45/1 ساعة.

$$s/c \begin{cases} x_1 \leq 1000 \\ x_2 \leq 500 \\ x_3 \leq 1500 \\ 1/50x_1 + \dfrac{1}{25x_2} + 1/45x_3 \leq 45 \end{cases}$$

4)شرط عدم السلبية:

$$x_i \geq 0 \ / \ i=\{1,2.3\}$$

<u>تمرين رقم 10</u>: تملك شركة لتعدين النحاس منجمين, ينتج كل منهما ثلاثة أنواع من الخام : عالي الجودة, المتوسط و منخفض الجودة. أدى الشركة عقد لتوريد 12 طن من الخام عالي الجودة , 8 أطنان من الخام متوسط الجودة و 24 طن من الخام منخفض الجودة.

ينتج المنجم الأول 6 طن من الخام مرتفع الجودة و 2 طن من الخام متوسط الجودة و 4 طن من الخام منخفض الجودة في الساعة.

ينتج المنجم الثاني 2 طن من الخام مرتفع الجودة و 2 طن من الخام متوسط الجودة و 12 طن من الخام منخفض الجودة في الساعة.

المطلوب: صياغة نموذج البرمجة الخطية اذا علمت ان تكلفة تعدين الطن الخام الواحد هي 2000 ون و 1600 ون مهما كانت الجودة؟

حل التمرين رقم10:

1)متغيرات القرار: x_1:عدد الساعات الازمة لتشغيل المنجم الأول

X_2: عدد الساعات الازمة لتشغيل المنجم الثاني

2)دالة الهدف: $min[Z] = 2000(6+2+4)x_1 + 1600(12+2+2)x_2$

$$min[Z] = 2000(12)x_1 + 1600(18)x_2$$

3)القيود:

$$s/c\begin{cases} 6x_1 \quad + 2x_2 \quad \geq 12 \\ 2x_1 \quad + 2x_2 \quad \geq 8 \\ 4x_1 \quad + 12x_2 \quad \geq 24 \end{cases}$$

4) شرط عدم السلبية:

$$x_i \geq 0 \; / \; i=\{1,2\}$$

المحور الثاني : طرق حل نموذج البرمجة الخطية

1) حل نموذج البرمجة الخطية بالطريقة البيانية

2) حل نموذج البرمجة الخطية بطريقة السمبلكس

المحورالثاني: طرق حل نموذج البرمجة الخطية

حل البرنامج الخطي يعني إيجاد قيم المتغيرات التي تجعل دالة الهدف في حالة التعظيم أو في حالة التدنئة, و يمكن حل نموذج البرمجة الخطية بإحدى الطريقتين التاليتين :

الطريقة البيانية : و تستخدم في النموذج الذي يحتوي على متغيرتين فقط.

طريقة السمبلكس أو طريقة الجداول: تستخدم هذه الطريقة مهما كان عدد متغيرات نموذج البرمجة الخطية.

1) حل نموذج البرمجة الخطية بالطريقة البيانية:

تستعمل الطريقة البيانية في حالة وجود متغيرين على الاكثر. لحلّ نموذج البرمجة الخطيّة يتمّ اتّباع الخطوات التّالية :

1) تحويل كلّ متراجحات القيود الى معادلات.

2) ايجاد احداثيات النّقاط.

3) نرسم القيود والّتي تمثل بخطوط مستقيمة.

4) نحدّد منطقة الحلّ وذلك بتشطيب المناطق التي لا تحقّق القيود ,وهي توجد في يمين المستقيم في حالة ما اذا كانت المتراجحة(اصغر او يساوي) والعكس صحيح.

5) ايجاد احداثيات منطقة الحلّ وتعويضها في دالّة الهدف.

6) النقطة التي تحقق اكبر قيمة هي الّتي تمثّل الحلّ الامثل في حالة التّعظيم, والنّقطة الّتي تحقّق اقلّ قيمة لدالة الهدف في حالة التّدنئة هي التي تمثّل الحلّ الامثل.

أ –حالة التعظيم:

مثال رقم01: تنتج مؤسّسة منتوجين A و B باستعمال آلتين. الرّبح المحقّق من A هو 10 وحدات , و الربح المحقّق من المنتوج B هو 12 وحدة. الجدول التّالي يوضّح عدد السّاعات المستغرقة لكّل آلة والطّاقة المتاحة.

المنتجات \ الآلات	الآلة 1	الآلة 2
المنتوجA	2	10
المنتوجB	6	4
الطاقة المتاحة	36	50

المطلوب: الحلّ بالطّريقة البيانية ؟

نموذج البرمجة الخطية:

الترميز: X_1: الكمية المنتجة من A

X_2:الكمية المنتجة منB

دالة الهدف:

$$max[Z] = 10x_1 + 12x_2$$

القيود:

$$s/c\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 \leq 36 \\ 10x_1 + 4x_2 \leq 50 \end{cases}$$

شرط عدم السلبية:

$$x_1 ، x_2 \geq 0$$

2) الحلّ البياني:

أ-تحويل المتراجحات الى معادلات وإيجاد الإحداثيات :

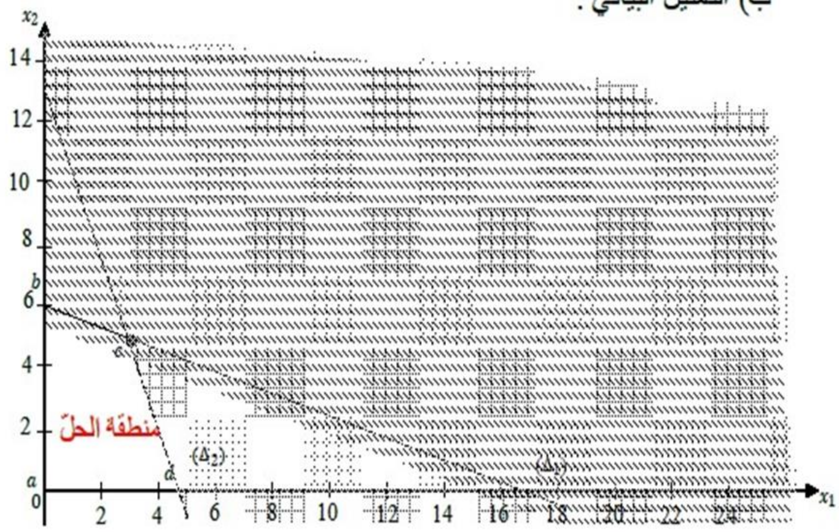
$$2\,x_1 + 6x_2 = 36 \ldots\ldots\ldots\ldots (\Delta_1)$$

x_1	0	18
x_2	6	0

$$10\,x_1 + 4x_2 = 50 \ldots\ldots\ldots\ldots (\Delta_2)$$

x_1	0	5
x_2	12.5	0

ب) التمثيل البياني :



3)احداثيات منطقة الحل:

	X_1	X_2	Z
a	0	0	0
b	0	6	72
C	**3**	**5**	**90**
D	5	0	50

إيجاد إحداثيات النقطة c :هي نقطة التقاطع بين المستقيم 1و2 اذن نحل جملة المعادلتين التاليتين :

$$2x_1 + 6x_2 = 36 \ldots\ldots\ldots(1)$$

$$10x_1 + 4x_2 = 50 \ldots\ldots\ldots(2)$$

$$(1)\Leftrightarrow x_1 = 18 - 3x_2$$

نعوض x_1في المعادلة الثانية :

$$(2)\Leftrightarrow \quad 10(18 - 3x_2)_{x2} + 4x_2 = 50 \Rightarrow \frac{x_2 = 5}{x_1 = 3}$$

لتحقيق أعظم ربح على المؤسسة انتاج 3 A و 5 وحدات من المنتوج الثاني لتحقيق ربح قدره 90 دج.

وحدات

$$\mathbf{Z^* = 90}$$

ب–حالة التدنئة:

مثال رقم 02: لدينا النموذج الرياضي التالي:

$$\min[Z] = 109x_1 + 80x_2$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \geq 8 \\ 3x_1 + 4x_2 \geq 10 \\ x_1 ،x_2 \geq 0 \end{cases}$$

المطلوب: الحل بالطريقة البيانية؟

حل المثال رقم 02:

1. تحويل المتراجحات إلى معادلات و إيجاد الإحداثيات:

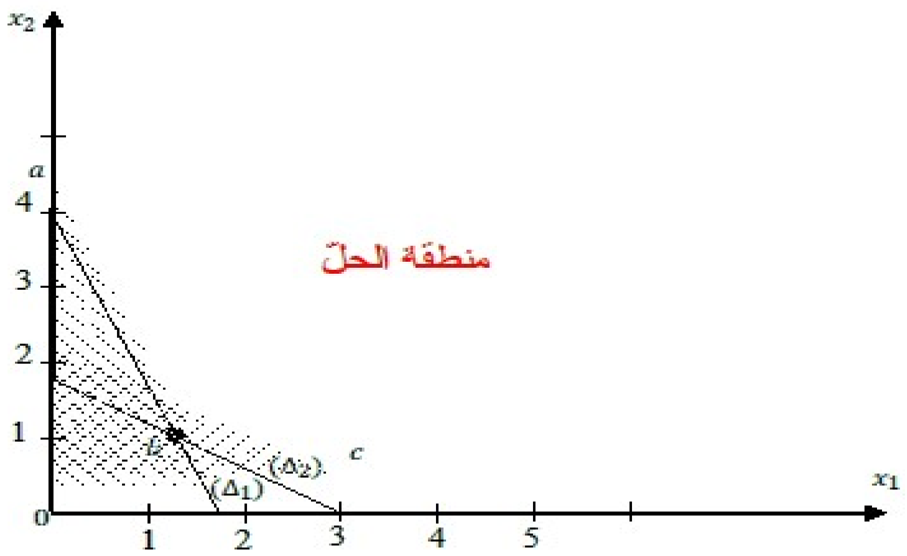
$$5x_1 + 2x_2 = 8 \ldots\ldots\ldots\ldots (\Delta_1)$$

x_1	0	1.6
x_2	4	0

$$3x_1 + 4x_2 = 10 \ldots\ldots\ldots\ldots (\Delta_2)$$

x_1	0	3.33
x_2	2.5	0

1. التمثيل البياني:



3) إحداثيات منطقة الحل:

	x_1	x_2	Z
a	0	4	320
b	**0.86**	**1.85**	**241.74**
c	10/3	0	362.97

b: هي نقطة التقاطع بين المستقيم (Δ_1)و(Δ_2) ، إذا نحل معادلتين:

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 = 8 \ldots\ldots\ldots(1) \\ 3x_1 + 4x_2 = 10 \ldots\ldots\ldots(2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow 5x_1 + 2x_2 = 8 \Rightarrow x_1 = \frac{8 - 2x_2}{5}$$

نعوض x_1 في المعادلة (2):

$$(2) \Leftrightarrow \quad 3\left(\frac{8 - 2x_2}{5}\right) + 4x_2 = 10 \Rightarrow \frac{x_2 = 1.85}{x_1 = 0.85}$$

القرار:

$$\mathbf{x_1 = 0.85}$$
$$\mathbf{x_2 = 1.85}$$
$$\mathbf{Z^* = 241.74}$$

ج- الحالات الخاصة لطريقة الحل البيانية

1)**حالة تعدد الحلول المثلى** : في هذه الحالة هناك وجود أكثر من قيمة لدالة الهدف. المثال التالي يوضح ذلك:

$$max[Z] = 2x_1 + 4x_2$$

$$\text{s/c} \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ x_1 + x_2 \leq 4 \end{cases}$$

$$x_1 \text{ ،} x_2 \geq 0$$

المطلوب :الحل بالطريقة البيانية؟

1) تحويل المتراجحات إلى معادلات و إيجاد الإحداثيات:

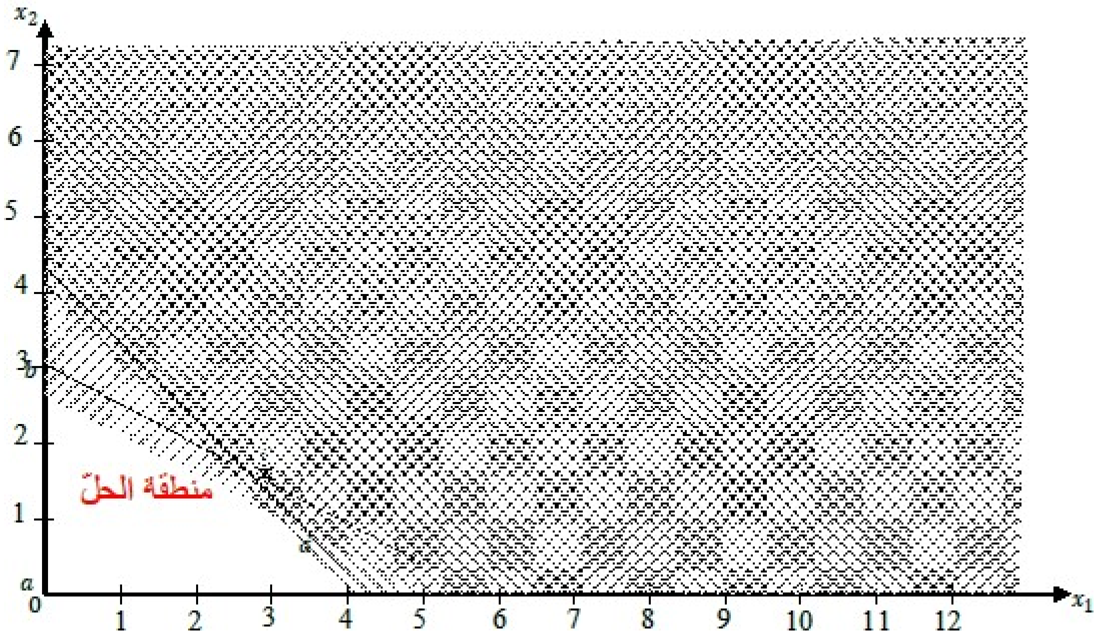
$$x_1 + 2x_2 = 5 \ldots\ldots\ldots\ldots (\Delta_1)$$

x_1	0	5
x_2	2.5	0

$$x_1 + x_2 = 4 \ldots\ldots\ldots\ldots (\Delta_2)$$

x_1	0	4
x_2	4	0

أ) التمثيل البياني:



3-إيجاد احداثيات منطقة الحل:

- إيجاد إحداثيات النقطة C :

C: هي نقطة التقاطع بين المستقيم (Δ_1)و(Δ_2) :

$$x_1 + 2x_2 = 5 \ldots\ldots\ldots(1)$$

$$x_1 + x_2 = 4 \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

$$(1) \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 4 \Rightarrow x_1 = 4 - x_2$$

نعوض x_1 في المعادلة (1):

$$(2) \Leftrightarrow (4 - x_2) + 2x_2 = 5 \Rightarrow \frac{x_2 = 3}{x_1 = 1}$$

	x_1	x_2	Z

a	0	0	0
b	0	2.5	**10**
c	1	3	**10**
d	4	0	8

4) الحل الامثل: تحصلنا على أكثر من قيمة ل **z=10:** ، و بالتالي هي حالة تعدد الحلول المثلى.

2) **حالة عدم توفر حل ممكن**: في هذه الحالة تكون القيود متناقضة (أكبر و أصغر في نفس الوقت)، و بالتالي لا يمكن الحصول على حل ملائم.

2) **حالة منطقة الحلول الغير المحددة**: هذه الحالة تقع فقط في حالة المسائل النظرية للبرمجة الخطية ، في هذه الحالة قيمة دالة الهدف غير محددة .

مثال : ليكن النموذج الخطي التالي :

$$max[Z] = x_1 + x_2$$

$$\text{s/c} \begin{cases} 4x_1 + 8x_2 \geq 40 \\ x_1 \geq 6 \\ x2 \geq 4 \end{cases}$$

$$x_i \geq 0 \ / \ i=\{1,2\}$$

المطلوب :الحل بالطريقة البيانية؟

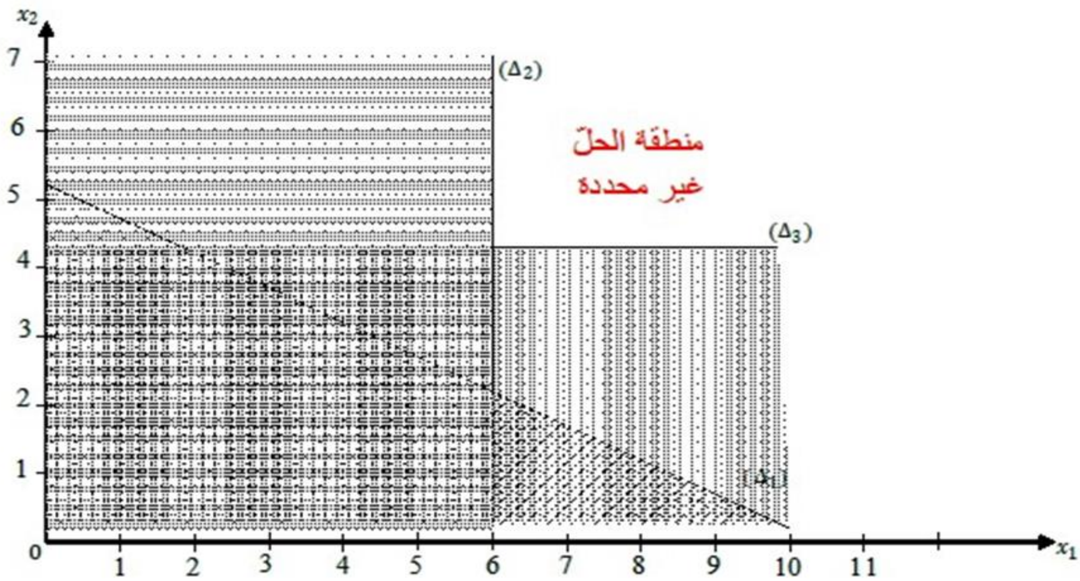
أ) تحويل المتراجحات إلى المعدلات و إيجاد الإحداثيات:

$$4x_1 + 8x_2 = 40 \ldots\ldots\ldots\ldots (\Delta_1)$$

x_1	0	10
x_2	5	0

$$x1 = 6 \ldots\ldots\ldots\ldots (\Delta_2)$$
$$x2 = 4 \ldots\ldots\ldots\ldots (\Delta_3)$$

أ) <u>التمثيل البياني:</u>



من خلال الشكل نلاحظ وجود منطقة حل غير محددة, و بالتالي وجود حل لا نهائي لدالة الهدف.

تمارين محلولة حول الطريقة البيانية

تمرين رقم 01: تنتج مؤسسة نوعين من العلب المصنوعة من مادة الكرتون.

- يتطلب إنتاج علبة واحدة من النوع الأول من العلب 1م^2 من الكرتون و 3 دقائق في ورشة التجميع.

- يتطلب إنتاج النوع الثاني من العلب 2م^2 من الكرتون و 2 دقائق في ورشة التجميع. كمية الكرتون المتاحة في المخزن 4م^2 .

- الوقت المتاح لورشة التجميع 6 دقائق.

المطلوب : أوجد عدد العلب المنتجة بالطريقة البيانية علما أن الربح الوحدوي المحقق من بيع هذه العلب على التوالي 5 دج ، 3 دج؟

حل التمرين رقم 01:

نموذج البرمجة الخطية:

1) متغيرات القرار : x_1 : الكمية المنتجة من العلب (1)

x_2: الكمية المنتجة من العلب (2)

2) دالة الهدف: $\max[Z] = 5x_1 + 3x_2$

3) القيود:

$$s/c\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 6 \end{cases}$$

4) شرط عدم السلبية:

$x_i \geq 0 \ / \ i=\{1,2\}$

الحل البياني:

أ-تحويل المتراجحات إلى معادلات و إيجاد الإحداثيات:

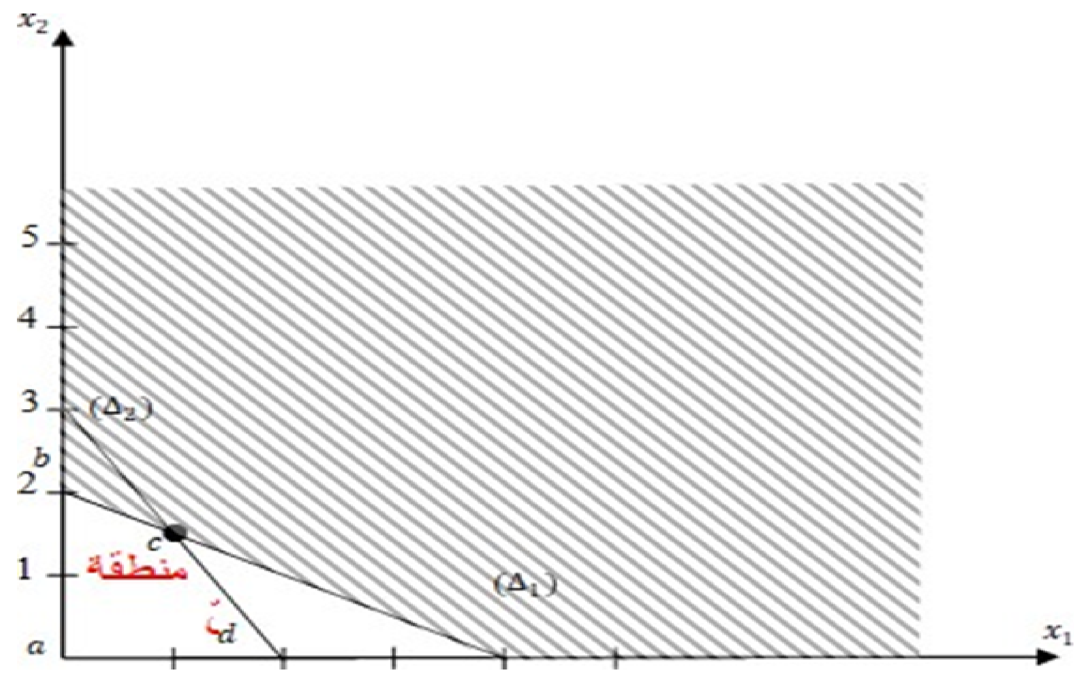
$$x_1 + 2x_2 = 4 \ldots\ldots\ldots\ldots (\Delta_1)$$

x_1	0	4
x_2	2	0

$$3x_1 + 2x_2 = 6 \ldots\ldots\ldots\ldots (\Delta_2)$$

x_1	0	2
x_2	3	0

ب- التمثيل البياني:



ج-إحداثيات دالة الهدف:

- إيجاد إحداثيات النقطة c : هي نقطة التقاطع بين (Δ_1)و(Δ_2) :

$$\begin{cases} x_1 \quad + 2x_2 \quad = 4 \ldots\ldots\ldots(1) \\ 3x_1 \quad + 2x_2 \quad = 6 \ldots\ldots\ldots(2) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow x_1 \quad = 4 - 2x_2$$

نعوض x_1 في المعادلة (2):

$$(2) \Leftrightarrow \quad 3(4 - 2x_2\ ) \quad + 2x_2 \quad = 6 \Rightarrow \frac{x_2 \quad = 1.5}{x_1 \quad = 1}$$

	x_1	x_2	Z
a	0	0	0
b	0	2	6
c	1	1.5	9.5
d	**2**	**0**	**10**

3) الحل الأمثل: على المؤسسة إنتاج 2 وحدة من العلبة (1) و(0) علبة من النوع الثاني لتحقيق ربح قدره $Z^*=10$:

تمرين رقم 02: مصنع ينتج منتوجين AوB كل منتوج يمر بثلاثة ورشات، الجدول الموالي يوضح استهلاك الطاقة بالساعات اللازمة لإنتاج كل وحدة من المنتوج في كل من الورشات الثلاثة.

المنتجات / الورشات	A	B	الطاقة المتاحة
الورشة 1	1	2	6
الورشة 2	1	1	4
الورشة 3	1	0	3

الربح الوحدوي	2	1	

المطلوب: حل النموذج بالطريقة البيانية؟

حل التمرين رقم 02:

أ/ نموذج البرمجة الخطية:

1. متغيرات القرار x_1: الكمية المنتجة من المنتوج A

x_2: الكمية المنتجة من المنتوج B

2. دالة الهدف:

$$\max[Z] = 2x_1 + x_2$$

3. القيود:

$$s/c \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 \leq 3 \end{cases}$$

4. شرط عدم السلبية:

$$x_j \geq 0 \ / \ j=\{1,2\}$$

ب-الحل البياني:

1)تحويل متراجحات القيود الى معادلات:

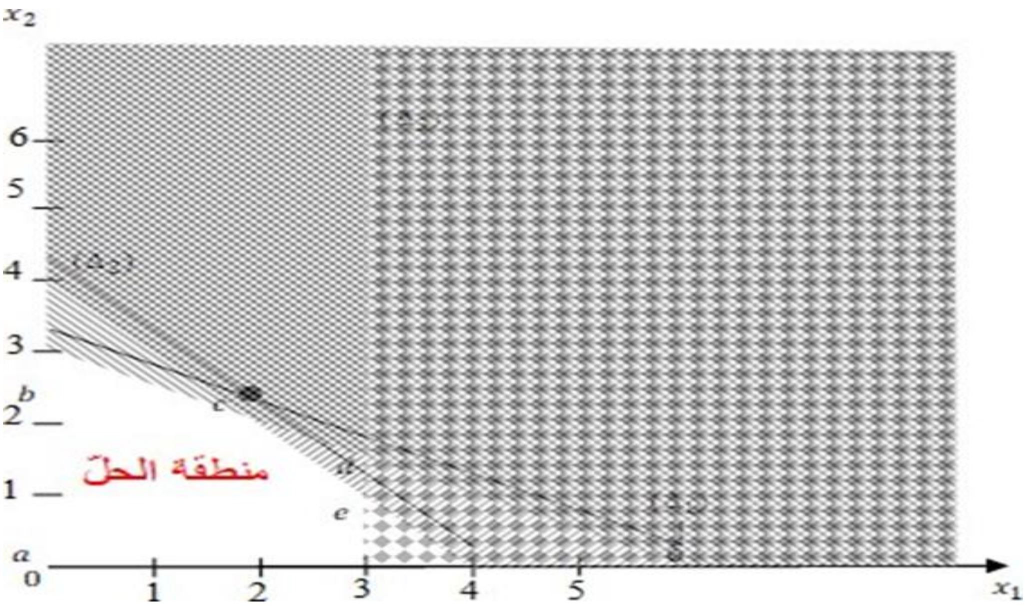
x_1	0	6
x_2	3	0

$$x_1 + 2x_2 = 6 \ldots\ldots\ldots\ldots (\Delta_1)$$

$$x_1 + x_2 = 4 \ldots\ldots\ldots\ldots (\Delta_2)$$

x_1	0	4
x_2	4	0

2) التمثيل البياني:



3)ايجاد احداثيات منطقة الحل:

- إيجاد إحداثيات النقطة c : هي نقطة التقاطع بين المستقيم(Δ_1)و(Δ_2) :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 6 \ldots\ldots\ldots. (1) \\ x_1 + x_2 = 4 \ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$$

$$(2) \Rightarrow x_1 = 4 - x_2$$

نعوض x_1 في المعادلة (1):

$$(1) \Leftrightarrow (4 - x_2) + 2x_2 = 6$$

$$6 - x_2 = 4 \Rightarrow \frac{x_2 = 2}{x_1 = 2}$$

	x_1	x_2	Z
A	0	0	0

B	0	3	3
C	2	2	6
D	**3**	**1**	**7**
E	3	0	6

- إيجاد إحداثيات النقطة d : هي نقطة التقاطع بين (Δ_1)و(Δ_3) :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \dots\dots\dots (1) \\ x_1 = 3 \dots\dots\dots (2) \end{cases}$$

نعوض x_1 في المعادلة (1) نجد : $1 = x_1$

4)الحل الأمثل: على المؤسسة إنتاج 2 وحدة من العلبة (1) و (0) علبة من النوع الثاني لتحقيق ربح قدره

$Z^* = 7$:.

تمرين رقم03: أوجد الحل الأمثل للنموذج التالي باستعمال الطريقة البيانية؟

$$\min[Z] = 10x_1 + 30x_2$$

$$s/c \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ 6x_1 + x_2 \geq 6 \\ x_2 \geq 1 \end{cases}$$

$$x_i \geq 0 \,/\, i=\{1,2\}$$

حل التمرين رقم 03:

1. تحويل المتراجحات إلى معادلات و إيجاد الإحداثيات:

x_1	0	2
x_2	3	0

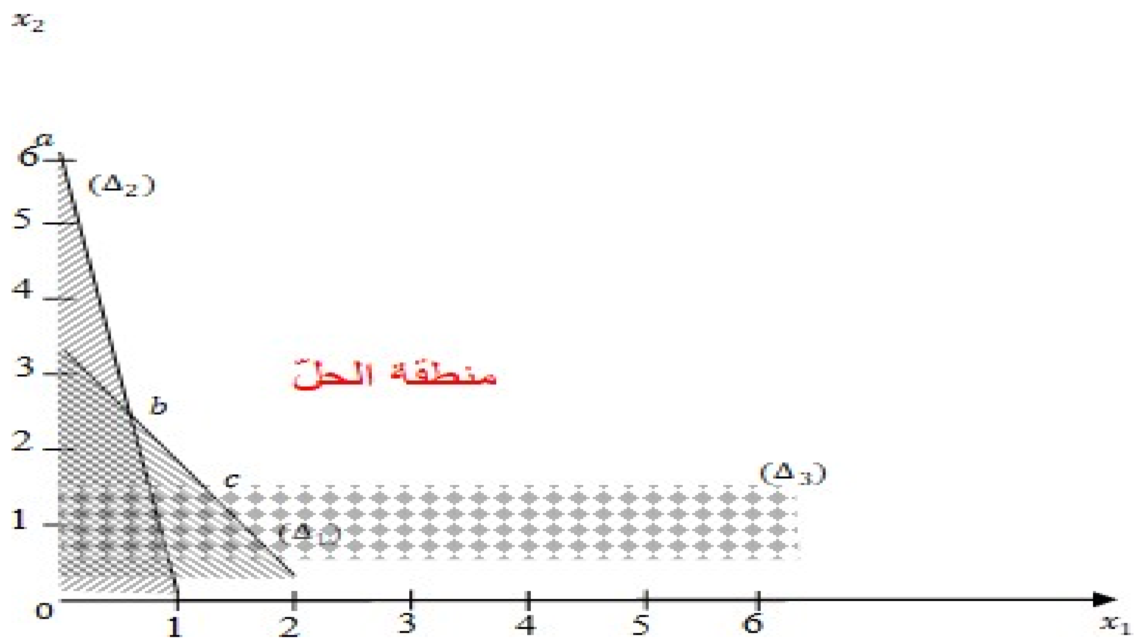
$$3x_1 + 2x_2 = 6 \dots\dots\dots\dots (1)$$

$$6x_1 + 2x_2 = 6 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

x_1	0	1
x_2	6	0

$$x_2 = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

2)التمثيل البياني



3)إيجاد إحداثيات دالة الهدف:

- إيجاد إحداثيات النقطة b : هي نقطة التقاطع بين(Δ_1)و(Δ_2) :

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 6 \ldots\ldots\ldots (1) \\ 6x_1 + x_2 = 6 \ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow 3x_1 + 2x_2 = 6 \Rightarrow x_1 = \frac{6 - 2x_2}{3}$$

نعوض x_1 في المعادلة (2) نجد: $x_2 = 2$ و $x_1 = 0.66$

- إيجاد إحداثيات النقطة c : هي نقطة التقاطع بين(Δ_1)و(Δ_2) :

$$\begin{cases} 3x_1 \quad + 2x_2 \quad = 6 \ldots \ldots \ldots .(1) \\ x_2 \quad = 1 \ldots \ldots \ldots (2) \end{cases}$$

نعوض x_2 في المعادلة (1)نجد: $x_1 = \frac{4}{3}$

	x1	x2	Z
a	0	6	180
b	0.66	2	66.6
c	**4/3**	**1**	**43.33**

4-الحل الأمثل: $x_1 = \frac{4}{3}$ ، $x_2 = 1$ ،$Z^* = 43.33$

تمرين رقم 04: لدينا النموذج الرياضي التالي:

$$\max[Z] = x_1 \quad + x_2$$

$$s/c \begin{cases} x_1 \quad + 2x_2 \quad \leq 20 \\ 2\,x_1 \quad + 3x_2 \quad \leq 60 \end{cases}$$

$$x_1 \ ،x_2 \quad \geq 0$$

المطلوب : الحل بالطريقة البيانية؟

حل التمرين رقم 04:

1) تحويل المتراجحات إلى معادلات:

x_1	0	20

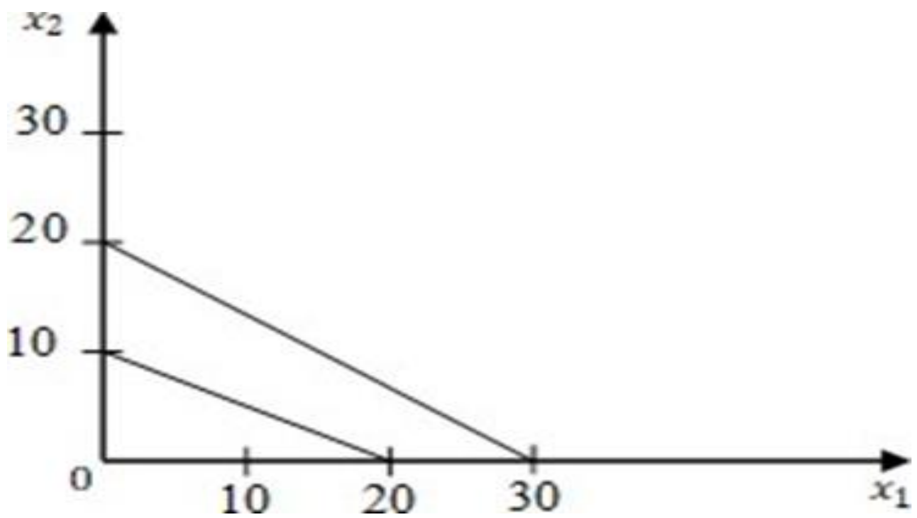
$$x_1 \quad + 2x_2 \quad = 20 \ldots \ldots \ldots \ldots (\Delta_1)$$

x_2	10	0

$$2x_1 + 3x_2 = 60 \ldots\ldots\ldots\ldots (\Delta_2)$$

x_1	0	30
x_2	20	0

2)التمثيل البياني:



3)احداثيات منطقة الحل:

$a(0.0) \Longrightarrow z=0$

$b(20.0) \Longrightarrow z=20$

$c(0.10) \Longrightarrow z=10$

4) الحل الأمثل: $X_1=20$, $X_2=0$, max (z)=20

2)طريقة السمبلكس لحل نموذج البرمجة الخطية:

طريقة السمبلكس من أهم الطرق لحل نموذج البرمجة الخطية. أول من استخدم هذه الطريقة هو(George Dantzig)سنة 1947.

أ)حالة التعظيم:

تستخدم طريقة السمبلكس لإيجاد قيم متغيرات القرارX التي تعظّم أو تقلّل دالة الهدف بإتباع الخطوات التالية:

1-كتابة النموذج على الشكل المعياري:

- نحول متراجحات القيود الى معادلات وذلك بإضافة متغيرات جديدة تسمى ب "متغيرات الفجوة" (المتغيرات التكاملية)، تكون مرفقة ب (1-) في حالة المتراجحة من نوع أكبر أو يساوي و (1+) في حالة أصغر أو يساوي.

- تعديل دالة الهدف : يتم تعديل دالة الهدف من خلال إضافة المتغيرات التكاملية، على أن يكون معامل هذه المتغيرات مساويا للصفر، وذلك لاستبعاد هذه المتغيرات من الحل الأمثل.

- شرط عدم السلبية: يتم تعديل شرط عدم السلبية و ذلك من خلال إضافة المتغيرات التكاملية التي لا تأخذ قيما سالبة بما أنها تعبر عن الموارد المتاحة المتبقية .

2-تحويل معادلات القيود للشكل المصفوفي: تكتب القيود في مصفوفة تسمى ب "مصفوفة القيود" ، نبحث فيها عن القاعدة و هي مصفوفة وحدية (التي تمثل معاملات المتغيرات التكاملية) .

3- وضع البيانات في جدول السمبلكس Simplexثم يتم اتاع الخطوات التالية:

أ) تحديد محور الدوران (Pivot) : و ذلك باختيار أكبر قيمة في السطر Δ_j و أصغر قيمة في العمود θ . وفق القاعدة التالية:

$$\theta = \frac{\text{قيمة المتغير الأساسي}}{\text{معاملات المتغير الداخل}}$$

ب) تحديد المتغير الداخل:(variables entrantes) ويكون ذلك بالنظر للسطر $Z_j - C_j$ ، بحيث يتم اختيار أكبر قيمة موجبة في السطر $Z_j - C_j$ في حالة max ، وأقل قيمة سالبة في السطر $Z_j - C_j$ في حالة min .

ج) تحديد المتغير الخارجي: (variables sortantes): يتم اختيار المتغير المقابل لأصغر قيمة ل θ.

د) حساب باقي العناصر بتطبيق قاعدة المستطيلات كما يلي:

$$\text{العنصر الجديد} = \text{العنصر القديم} - \frac{\text{العنصر المقابل في سطر محور الدوران} \times \text{العنصر المقابل في عمود محور الدوران}}{\text{محور الدوران}}$$

ه) بعد حساب كل القيم يتم التأكد من أمثلية الحل بالنظر إلى السطر $C_j - Z_j$ إذا كان في حالة max نتوقف عن الحل عندما تكون كل سطر $C_j - Z_j$ سالبة أو تساوي الصفر، و العكس صحيح في حالة التدنئة (min).

$\Delta_j = Z_j - C_j \leq 0$: فإن المسألة تقبل حل أدنى (min)

$\Delta_j = C_j - Z_j \geq 0$: فإن المسألة تقبل حل أقصى (max).

مثال: ليكن لدينا نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$\max[Z] = 100x_1 + 60x_2$$

$$s/c \begin{cases} 8x_1 + 2x_2 \leq 40 \\ 6x_1 + 9x_2 \leq 108 \end{cases}$$

$$8x_1 + 6x_2 \leq 96$$

$$x_1 ، x_2 \geq 0$$

المطلوب : إيجاد الحل الأمثل بطريقة Simplex ؟

1)كتابة النموذج على الشكل المعياري:

$$\begin{cases} \max[Z]=100x_1+60x_2+0S_1+0S_2+0S_3 \\ 8X_1+2X_2+S_1=40 \\ 6X_1+9X_2+S_2=108 \\ 8X_1+6X_2+S_3=96 \end{cases}$$

$X_1, X_2, S_1, S_2, S_3 \geq 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \max[Z]=100x_1+60x_2+0S_1+0S_2+0S \\ 8X_1+2X_2+S_1+0S_2+0S_3=40 \\ 6X_1+9X_2+0S_1+S_2+0S_3=108 \\ 8X_1+6X_2+0S_1+0S_2+S_3=96 \end{cases}$$

$X_1, X_2, S_1, S_2, S_3 \geq 0$

2)تحويل معادلات القيود للشكل المصفوفي: نحول متراجحات المعادلات للكل المعياري الى الشكل المصفوفي, فنتحصل على مصفوفة الوحدة التي تسمى بالمصفوفة المساعدة للحل.

$$\begin{bmatrix} 8 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 9 & 0 & 1 & 0 \\ 8 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3)تشكيل جدول الحل الأولي: نكتب عناصر مصفوفة الأساس داخل جدول السمبلكس, ثم نعين عنصر الدوران الذي يمثل التقاطع بين العنصر الداخل الذي يقابل أكبر قيمة لدالة الهدف و العنصر الخارج الذي يقابل أصغر bi.قيمة ل العمود ϴ. حيث عمود ϴ= عمود أكبر قيمة لدالة الهدف / عمود الموارد المتاحة.

	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	bi	ϴ
S_1	**8**	2	1	0	0	40	5
S_2	6	9	0	1	0	108	18
S_3	8	6	0	0	1	96	12

$\underline{Z}_{=}c_j$-z_j	100	60	0	0	0	0	

- X_1 يمثل المتغير الداخل الذي يقابل عمود أكبر قيمة لدالة الهدف.

-S_1مثل المتغير الخارج الذي يقابل أصغر قيمة للعمود θ

-الرقم 8 يمثل محور الدوران الناتج عن تقاطع المتغير الداخل و المتغير الخارج.

-في جدول الحل الأول الأساسي في حالة التعظيم نجد دائما قيمة دالة الهدف $Z=0$,

و بالتالي سوف نقوم في ما يلي بتحسين قيمة دالة الهدف الى غاية الوصول للحل الأمثل.

4) تحسين الحل إلى غاية الوصول إلى الحل الأمثل:

لتحسين الحل نتبع الخطوات المذكورة سابقا و ذلك كما يلي:

-تحديد محور الدوران بتقاطع المتغير الداخل مع المتغير الخارج ,

-نقسم سطر محور الدوران على محور الدوران

- نحول عمود محور الدوران الى عمود وحدي

- نحول باقي العناصر بطريقة المستطيلات

-نستبدل المتغيرة الخارجة من الأساس(التي تقابل سطر محور الدوران) بالمتغيرة الداخلة للأساس(التي تقابل عمود محور الدوران).

	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	bi	θ
X_1	**1**	1/4	1/8	0	0	5	20
S_2	0	**15/2**	3-/4	1	0	78	10,4
S_3	0	4	1-	0	1	56	14
$\underline{Z}_{=}c_j$-z_j	0	35	2-/25	0	0	500-	

نلاحظ من خلال هذا الجدول أن بعض قيم دالة الهدف لا تزال موجبة , و لكن تم تحسين الحل بآنتقال قيمة دالة الهدف من الصفر الى 500 , و بالتالي ننتقل لجدول تحسين الحل الثالث, بآتباع نفس الخطوات السابقة.

-و يكون جدول الحل الأساسي الثالث كما يلي:

	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	bi
X_1	1	0	20/3	30/1-	0	2,4
X_2	0	1	10/1-	15/2	0	10,4
S_3	0	0	5/3-	15/8-	1	14,4
$Z=c_j-z_j$	0	0	9-	3/14-	0	864-

نلاحظ من خلال هذا الجدول ان جميع قيم دالة الهدف سالبة او معدومة و بالتالي توصلنا الى الحل الأمثل التالي:

$$X_2=10.4 \quad , X_1=2.4$$

بالتعريض في قيمة دالة الهدف نجد:

$$Z=100(2.4) + 60\ (10.4) = 864$$

-هذه النتائج تحقق القيدين الأول و الثاني تماما , أما القيد الثالث فيحتوي على طاقة عاطلة (غير مستخدمة), قيمتها :

$$S_3=14.4$$

-اذا كان النموذج من نوع التدنئة, فنصل للحل الأمثل عندما تكون قيم دالة الهدف موجبة او معدومة.

ب-حالة التدنئة:

في هذه الحالة نستعمل طريقة M الكبرى (Big M), تعتمد هذه الطريقة على أساس إضافة معامل للمتغير الاصطناعي في دالة الهدف، و يتم حل النموذج بطريقة السمبلكس الاعتيادية.

مثال: لدينا النموذج الرياضي التالي :

$$\min[Z] = 2x_1 \quad + 3x_2$$
$$s/c\begin{cases} 3x_1 & + 4x_2 & \geq 20 \\ 5x_1 & + 2x_2 & \geq 12 \end{cases}$$
$$x_1 \quad ،x_2 \quad \geq 0$$

المطلوب: حل النموذج بطريقة Mالكبرى؟

الحل: 1- إيجاد الحل المبدئي:

$$\min[Z] = 109x_1 \quad + 80x_2 \quad + 0S_1 + 0S_2$$
$$s/c\begin{cases} 3x_1 & + 4x_2 & - S_1 = 10 \\ 5x_1 & + 2x_2 & - S_2 = 12 \end{cases}$$
$$x_1 \quad ،x_2 \quad ،S_1،S_2 \geq 0$$

2- الشكل المصفوفي:

AX=b

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ S_1 \\ S_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 12 \end{pmatrix}$$

للحصول على مصفوفة الوحدة (لا يوجد حل أساسي) يتطلب الأمر إدخال المتغيرات الاصطناعية كما يلي:

$$\min[Z] = 109x_1 \quad + 80x_2 \quad + 0S_1 + 0S_2 + MR_1 + MR_2$$
$$s/c\begin{cases} 3x_1 & + 4x_2 & - S_1 + R_1 = 10 \\ 5x_1 & + 2x_2 & - S_2 + R_2 = 8 \end{cases}$$
$$x_1 \quad ،x_2 \quad ،S_1،S_2،R_1،R_2 \geq 0$$

M: هي معاملات المتغيرات الاصطناعية في دالة الهدف ، حيث Mعدد كبير جدا.

و بالتالي تصبح مصفوفة القيود على النحو التالي:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ S_1 \\ S_2 \\ R_1 \\ R_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 12 \end{pmatrix}$$

3– بناء على البيانات السابقة يتم بناء السمبلكس كما يلي:

C_B	B	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	θ
			109	80	0	0	M	M	
M	a_5	10	3	4	-1	0	1	0	$\frac{10}{3}$
M	$\leftarrow a_6$	8	5	2	0	-1	0	1	$\frac{8}{5} \leftarrow$
$\Delta_j = Z_j - C_j$			8M-109	6M-80	-M	-M	0	0	
M	a_5	$\frac{26}{5}$	0	$\frac{14}{5}$	-1	$\frac{3}{5}$	1	$\frac{-3}{5}$	$\frac{26}{5} \times \frac{5}{14} = 1,85 \leftarrow$
109	a_1	$\frac{8}{5}$	1	$\frac{2}{5}$	0	$\frac{-1}{5}$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{8}{5} \times \frac{5}{2} = 4$
$\Delta_j = Z_j - C_j$			0	$\frac{14M-182}{5}$	-M	$\frac{14M-182}{5}$	0	$\frac{-8M-109}{5}$	
80	a_2	$\frac{13}{7}$	0	1	$\frac{-5}{14}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{-3}{14}$	
109	a_1	$\frac{6}{7}$	1	0	$\frac{1}{7}$	$\frac{-2}{7}$	$\frac{-1}{7}$	$\frac{2}{7}$	
$\Delta_j = Z_j - C_j$			0	0	-13	-14	-M+13	-M+14	

- بما أن $\Delta_j \leq 0$ فإن الحل الذي تم التوصل إليه هو الحل الأمثل.

$$\begin{cases} x_1 = \frac{6}{7} \\ x_2 = \frac{13}{7} \\ Z^* = \frac{6}{7}(109) + \frac{13}{7}(80) = 242 \end{cases}$$ -

تمارين محلولة حول طريقة السمبلكس

تمرين رقم 01: ليكن لدينا نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$\max[Z] = 2x_1 + 3x_2$$

$$s/c \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 20 \\ x_1 + x_2 \leq 12 \end{cases}$$

$$x_1 ،x_2 \geq 0$$

المطلوب : إيجاد الحل الأمثل بطريقة Simplex ؟

حل التمرين 01:

1. تحويل المتراجحات إلى معادلات بإضافة متغيرات الفجوة: (النموذج المعياري).

$$\max[Z] = 2x_1 + 3x_2 + 0S_1 + 0S_2$$

$$s/c \begin{cases} x_1 + 2x_2 + S_1 \leq 20 \\ x_1 + x_2 + S_2 \leq 12 \end{cases}$$

$$x_1 ،x_2 ،S_1 ،S_2 \geq 0$$

2. الشكل المصفوفي: AX=b

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ S_1 \\ S_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 12 \end{pmatrix}$$

3. جدول السمبلكس:

معاملات المتغيرات في دالة الهدف	x_1 ↓	x_2 ↓	S_1	S_2	bi	θ
S_1	1	**2**	1	0	20	20/2=10
S_2	1	1	0	1	12	12/1=12
$C_j - Z_j$	2	3	0	0		
x_2	1/2	1	1/2	0	10	20
S_2	**1/2**	0	-1/2	1	2	4
$C_j - Z_j$	1/2	0	-3/2	0	-30	
x_1	0	1	1	-1	**8**	
x_2	1	0	-1	2	**4**	
Z_j	0	0	-1	-1	**-32**	

في السطر الأخير نجد : $C_j - Z_j \leq 0$ و الدالة من الشكل max فالحل الأمثل هو:

$$x_1 = 4 \text{ ،} \; x_2 = 8 \text{ ،} \; Z^* = 32$$

تمرين رقم 02: لدينا النموذج الرياضي التالي:

$$\max[Z] = 2x_1 + x_2$$

$$s/c \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 \leq 3 \end{cases}$$

$$x_1 \text{ ،} x_2 \geq 0$$

المطلوب : حل النموذج بطريقة السمبلكس؟

حل التمرين رقم01:

1- تحويل المتراجحات إلى معادلات و تعديل دالة الهدف :

$$\max[Z] = 2x_1 \ + 3x_2 \ + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$$

$$s/c \begin{cases} x_1 \ + 2x_2 \ + S_1 = 6 \\ x_1 \ + x_2 \ + S_2 = 4 \\ x_1 \ + S_3 = 3 \end{cases}$$

$$x_1 \ ،x_2 \ ،S_1،S_2،S_3 \geq 0$$

2- مصفوفة القيود : $Ax = b$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

B	b القيم الحرة	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	$\theta = \frac{b}{a_i}$
		0	0	0	0	1	
a_3	6	1	2	1	0	0	$\frac{6}{1} = 6$
a_4	4	1	1	0	1	0	$\frac{4}{1} = 4$
a_5	3	1^{PIVOT}	0	0	0	1	$\frac{3}{1} = 3 \leftarrow$
$\Delta_j = C_j - Z_j$		2	1	0	0	0	
a_3	3	0	2	-1	0	-1	$\frac{3}{2}$
a_4	1	0	1^{PIVOT}	0	1	-1	$1 \leftarrow$
a_1	3	1	0	0	0	1	$\frac{3}{0} = \infty$
$\Delta_j = C_j - Z_j$		0	1	0	0	-2	

a_3	1	0	0	1	-2	-1	
a_4	1	1	0	0	1	-1	
a_1	3	1	0	0	0	1	
$\Delta_j = C_j - Z_j$		0	0	0	-1	-1	

بما أن $\Delta_j \leq 0$ ، فإن الحل الأمثل هو :

$$\boldsymbol{x_1 = 3}$$
$$\boldsymbol{x_2 = 1}$$
$$\boldsymbol{Z^* = 2(3) + 1(1) = 7}$$

تمرين رقم 03: لدينا نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$\min[Z] = 2x_1 + x_2$$
$$s/c \begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 10 \\ 4x_1 + 2x_2 \geq 12 \end{cases}$$
$$x_1 \text{ ،} x_2 \geq 0$$

المطلوب : أوجد الحل الأمثل باستخدام طريقة M الكبرى؟

حل التمرين رقم 02:

1/ الحل بطريقة (Big M):

أ- تحويل المتراجحات إلى معادلات و تعديل دالة الهدف:

$$\min[Z] = 2x_1 + x_2 + 0S_1 + 0S_2 + MR_1 + MR_2$$
$$s/c \begin{cases} x_1 + 3x_2 - S_1 + R_1 = 20 \\ 4x_1 + 2x_2 - S_2 + R_2 = 12 \end{cases}$$

$$x_1 \ \text{،} x_2 \ \text{،} S_1\text{،}S_2\text{،}R_1\text{،}R_2 \geq 0$$

ب-الشكل المصفوفي: $Ax = b$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ S_1 \\ S_2 \\ R_1 \\ R_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 12 \end{pmatrix}$$

ج- جدول السمبلكس:

X_1 2	$\downarrow X_2$ 1	S_2 0	S_2 0	R_1 M	R_2 M	ق م الأساسية	م م الأساسية	ϑ
1 4	<u>3</u> 2	-1 0	0 -1	1 0	0 1	30 40	M M	10 20
5M	5M	-M	-M	M	M	70M		
-5M	1-5M	M	M	0	0			

X_2 R_2	1/3 <u>10/3</u>	1 0	-1/3 2/3	0 -1	1/3 -2/3	0 1	10 20	1 3 M 3
Z_j	$\frac{1}{3}-\frac{2}{3}M$	1	$-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}M$	-M	$\frac{1}{3}-\frac{2}{3}M$	M	10+20M	
$C_j - Z_j$	$\frac{5}{3}-\frac{10}{3}M$	0	$\frac{1}{3}-\frac{2}{3}M$	M	$\frac{-1}{3}+\frac{5}{3}M$	0		
X_2 X_1	0 1	1 0	-2/5 1/5	$\frac{1}{10}$ $\frac{-3}{10}$	2/5 -1/5	$\frac{-1}{10}$ $\frac{3}{10}$	**8** **6**	
Z_j	2	1	0	$\frac{-1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	**20**	
$C_j - Z_j$	0	0	0	$\frac{1}{10}$	M	M-1/2		

كل قيم السطر الأخير لـ $C_j - Z_j$ موجبة أو تساوي الصفر، مع العلم أن دالة الهدف من النوع min

الحل الأمثل:

$$\boldsymbol{x_1 = 6}$$

$$\boldsymbol{x_2 = 8}$$

$$\boldsymbol{Z^* = 20}$$

المحور الثالث : النموذج المقابل

1)تحويل النموذج الأصلي الى النموذج المقابل (الثنائي)

2) إيجاد حل البرنامج الخطي الأصلي من جدول السمبلكس للبرنامج الثنائي (المقابل)

النموذج المقابل

لكل نموذج خطي أصلي (primal) ،برنامج ثنائي يطلق عليه النموذج المقابل (Dual).

- يستعمل النموذج المقابل لتسهيل إيجاد الحل الأمثل عندما يصعب حل النموذج الأصلي.

1)تحويل النموذج الأصلي الى النموذج المقابل (الثنائي):

- لإيجاد النموذج المقابل نتبع الخطوات التالية:

1- نحول دالة الهدف منmax في النموذج الأصلي إلى min في النموذج المقابل، و العكس صحيح.

2- عمود الثوابت في البرنامج الأصلي يتحول إلى متغيرات دالة الهدف في البرنامج المقابل.

3- تحويل اتجاه المتراجحات في النموذج المقابل.

4- تتغير متغيرات البرنامج الأولي إلى $y_1, y_2 \dots \dots \dots y_n$ في النموذج المقابل.

في كلا النموذجين (أصلي أو المقابل) فإن المتغيرات غير سالبة.

إذا كان البرنامج الأصلي في شكل صيغته القانونية التالية:

$$\max[z] = C_1x_1 + C_2x_2 + C_3x_3$$

$$s/c\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \le b_2 \end{cases}$$

$$x_1 \text{ ،} x_2 \text{ ،} x_3 \ge 0$$

فإن برنامجه الثنائي هو:

$$\min[z] = b_1y_1 + b_2y_2$$

$$s/c\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \ge C_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 \ge C_2 \\ a_{13}y_1 + a_{23}y_2 \ge C_3 \end{cases}$$

$$y_1 \text{ ،} y_2 \ge 0$$

يمكن تلخيص ذلك في الجدول التالي:

	المسألة الاصلية	المسألة الثنائية
المتغيرات	X_i	Y_i
	عدد المتغيرات	عدد القيود
دالة الهدف	Max	Min
	Min	Max
	معاملات دالة الهدف	الطرف الأيمن للقيود bj
القيود	مصفوفة معاملات القيود	منقول مصفوفة معاملات القيود
	الطرف الأيمن للقيود b_j	معاملات دالة الهدفcj
	$\leq$	$\geq$
	$\geq$	$\leq$

مثال رقم 01:

ليكن لدينا النموذج الرياضي التالي:

$$\min[Z] = 2x_1 \quad + 4x_2$$

$$s/c\begin{cases}15x_1 & + 5x_2 & \geq 50\\ 25x_1 & + 6x_2 & \geq 75\\ 60x_1 & + 7x_2 & \geq 80\end{cases}$$

$$x_1 \ ، x_2 \quad \geq 0$$

المطلوب: تحويل النموذج الأصلي إلى النموذج المقابل؟

حل المثال 01:

$$\max[Z] = 50y_1 \quad + 75y_2 \quad + 80y_3$$

$$s/c\begin{cases} 15y_1 \quad + 25y_2 \quad + 60y_3 \quad \leq 2 \\ 5y_1 \quad + 6y_2 \quad + 7y_3 \quad \leq 4 \end{cases}$$

$$y_1 \quad ،y_2 \quad ،y_3 \quad \geq 0$$

مثال رقم 02: ليكن لدينا النموذج الرياضي التالي:

$$\max[Z] = x_1 \quad + x_2 \quad - x_3$$

$$s/c\begin{cases} 3x_1 \quad - 2x_2 \quad + x_3 \quad \leq 50 \\ 5x_1 \quad + 6x_2 \quad \leq 20 \\ -x_1 \quad + x_2 \quad \leq 8 \end{cases}$$

$$x_1 \quad ،x_2 \quad ،x_3 \quad \geq 0$$

المطلوب :تحويل النموذج الأولي الى النموذج المقابل؟

حل المثال رقم 02:

$$\min[Z] = 18y_1 \quad + 20y_2 \quad - 8y_3$$

$$s/c\begin{cases} 3y_1 \quad + 5y_2 \quad - y_3 \quad \geq 1 \\ -2y_1 \quad + 6y_2 \quad + y_3 \quad \geq 1 \\ y_1 \quad \geq -1 \end{cases}$$

$$y_1 \quad ،y_2 \quad ،y_3 \quad \geq 0$$

مثال رقم 03: لدينا النموذج الرياضي التالي:

$$\max[Z] = x_1 \quad + x_2 \quad - x_3 \quad - 2x_4$$

$$s/c\begin{cases} 3x_1 \quad - 2x_2 \quad + x_3 \quad + 5x_4 \quad \leq 10 \\ 5x_1 \quad + 6x_3 \quad \leq 20 \\ -x_1 \quad + x_2 \quad + 4x_3 \quad \geq 9 \end{cases}$$

$$x_1 \quad ،x_2 \quad ،x_3 \quad ،x_4 \quad \geq 0$$

المطلوب : النموذج المقابل ؟

حل المثال رقم03: نلاحظ أن القيد الثالث من نوع أكبر أو يساوي و الدالة من الشكل(max) ، لذلك

نحول القيد إلى أصغر أو يساوي كما يلي:

$$x_1 - x_2 - 4x_3 \le -9$$

النموذج المقابل:

$$\min[z] = 10y_1 + 20y_2 - 9y_3$$

$$s/c\begin{cases} 3y_1 + 5y_2 + y_3 \ge 1 \\ -2y_1 - y_3 \ge 1 \\ y_1 + y_2 - 4y_3 \ge -1 \\ 5y_1 \ge -2 \end{cases}$$

$$y_1 ، y_2 ، y_3 \ge 0$$

مثال رقم 04: ليكن النموذج الأصلي التالي:

$$\max[Z] = 3x_1 - 5x_2$$

$$s/c\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 8 \\ x_1 - x_2 \le 4 \end{cases}$$

$$x_1 ، x_2 \ge 0$$

المطلوب :النموذج المقابل؟

حل المثال رقم 04:

- القيد هو عبارة عن معادلة ،و بالتالي يحول على النحو التالي:

$$x_1 + 2x_2 = 8 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8 \\ -x_1 - 2x_2 \le -8 \end{cases}$$

النموذج المقابل :

$$\min[Z] = 8y_1 \ -8y_2 \ +4y_3$$

$$s/c\begin{cases} y_1 \ -y_2 \ +y_3 \ \geq 3 \\ 2y_1 \ -2y_2 \ -y_3 \ \geq -5 \end{cases}$$

$$y_1 \ ،y_2 \ ،y_3 \ \geq 0$$

2) إيجاد حل البرنامج الخطي الأصلي من جدول السمبلكس للبرنامج الثنائي (المقابل)

يمكن الحصول على الحل الأمثل للنموذج الأولي من خلال حل النموذج المقابل بالطريقة المبسطة , أو الطريقة البيانية.

مثال: ليمن لدينا البرنامج الخطي التالي:

$$\min[Z] = 500x_1 \ +100x_2 \ +150x_3$$

$$s/c\begin{cases} x_1 \ +x_2 \ +2x_3 \ \geq 40 \\ x_1 \ +2x_2 \ +2x_3 \ \geq 10 \\ x_1 \ +x_2 \ \geq 30 \end{cases}$$

$$x_1 \ ،x_2 \ ،x_3 \ \geq 0$$

المطلوب: 1-أكتب النموذج المقابل و أوجد حله الأمثل؟

2-من جدول الحل الأمثل للنموذج المقابل , استنتج الحل الأمثل للنموذج الأصلي؟

الحل:

1-كتابة النموذج المقابل:

$$\max[Z] = 40y_1 \ +10y_2 \ +30y_3$$

$$\begin{cases} y_1 \quad + y_2 \quad + y_3 \quad \leq 500 \\ y_1 \quad + 2y_2 \quad + y_3 \quad \leq 100 \end{cases}$$

$$y_1 \quad + 2y_2 \quad + y_3 \quad \leq 100$$

$$y_1 \quad ،y_2 \quad ،y_3 \quad \geq 0$$

2-حل النموذج بطريقة السمبلكس:

$$\max[Z] = 40y_1 \quad + 10y_2 \quad + 30y_3 \quad + 0x_1 \quad + 0x_2 \quad + 0x_3$$

$$\begin{cases} y_1 \quad + y_2 \quad + y_3 \quad + x1 \leq 500 \\ y_1 \quad + 2y_2 \quad + y_3 \quad + x_2 \quad \leq 100 \end{cases}$$

$$y_1 \quad + 2y_2 \quad + y_3 \quad + x_3 \quad \leq 100$$

$$y_1 \quad ,y_2 \quad ,y_3 \quad ,x_1 \quad ،x_2 \quad ،x_3 \quad \geq 0$$

-جدول السمبلكس:

	Y_1	Y_2	Y_3	X_1	X_2	X_3	b_i	ɵ
X_1	1	1	1	1	0	0	500	500
X_2	1	2	1	0	1	0	100	100
X_3	**2**	2	0	0	0	1	150	75
Z_i	40	10	30	0	0	0	0	
X_1	0	0	1	1	0	½	425	425
X_2	0	1	**1**	0	1	-1/2	25	25
Y_1	1	1	0	0	0	½	75	0
Z_i	0	-30	30	0	0	-20	-3000	
X_1	0	-1	0	1	-1	1	400	
Y_3	0	1	1	0	1	-1/2	25	
Y_1	1	1	0	0	0	½	75	

Z_i	0	-60	0	0	-30	-5	-3750	

من خلال جدول السمبلكس تحصلنا على الحل الأمثل للنموذج المقابل لان كل قيم دالة الهدف سالبة أو تساوي الصفر .

3–استنتاج حل النموذج الأصلي من جدول السمبلكس: تمثل الخانات التي باللون الأزرق الحل الأمثل للنموذج الأصلي.

النموذج الأصلي و المقابل لهم نفس دالة الهدف=3750 ون

النموذج الأصلي	**النموذج المقابل**
$\min[Z] = 500x_1 + 100 + 150x_3$ $s/c\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 40 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 10 \\ x_1 + x_2 \geq 30 \end{cases}$ $x_1 ، x_2 ، x_3 \geq 0$	$\max[Z] = 40y_1 + 10y_2 + 30y_3$ $\begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 \leq 500 \\ y_1 + 2y_2 + y_3 \leq 100 \end{cases}$ $y_1 + 2y_2 + y_3 \leq 100$ $y_1 ، y_2 ، y_3 \geq 0$
<u>الحل الأمثل</u> $x_1 = 0 ، x_2 = 30$ $x_3 = 5$ $\mathbf{Z^* = 3750}$	**<u>الحل الأمثل</u>** $y_1 = 75 ، y_2 = 0$ $y_3 = 25$ $\mathbf{Z^* = 3750}$

تمارين حول النموذج المقابل

تمرين رقم 01:

مؤسسة إنتاج تنتج منتوجين A وB ، باستعمال مادتين أوليتين (1) و(2) .

- يحتاج المنتوج (A): 20 وحدة من المادة الأولية (1) و 15 وحدة من المادة الأولية (2).
- يحتاج المنتوج (B): 30 وحدة من المادة الأولية (1) و 20 وحدة من المادة الأولية (2).
- مخزون المادة الأولية (1) و (2) على التوالي: 60 وحدة و 100 وحدة.
- الربح المحقق من المنتوج (A) :6 دج و المنتوج (B): 9 دج.

المطلوب:

1. نموذج البرمجة الخطية؟
2. النموذج المقابل؟

حل التمرين رقم 01:

1/ نموذج البرمجة الخطية:

أ) الترميز: x_1: الكمية المنتجة من A

x_2: الكمية المنتجة من B

ب) دالة الهدف: $\max[Z] = 6x_1 + 9x_2$

ج) القيود:

$$s/c\begin{cases} 20x_1 + 30x_2 \leq 60 \\ 15x_1 + 20x_2 \leq 100 \end{cases}$$

د) شرط عدم السلبية: $x_1 \ x_2 \ \geq 0$

2/ النموذج المقابل:

أ) الترميز: y_1: سعر المادة (1)

y_2: سعر المادة (2)

ب)دالة الهدف: $\min[Z] = 600y_1 + 100y_2$

ج) القيود:

$$s/c\begin{cases} 20y_1 + 15y_2 \geq 6 \\ 30y_1 + 20x_2 \geq 9 \end{cases}$$

د) شرط عدم السلبية: $y_1 \quad y_2 \geq 0$

تمرين رقم 02:

تريد مؤسسة صناعة منتوج مركب من 30% من الحديد، 30% من الصلب،40% من الرصاص على الأقل.

- الجدول التالي يوضح التركيبة بالنسبة المئوية من الموارد و ثمنها:

الموارد	A	B	C	D	E
الحديد	%10	%10	%40	%60	%30
الصلب	%10	%30	%50	%30	%30
الرصاص	%80	%60	%10	%10	%40
سعر الموارد (دج)	4.1 دج	4.3 دج	5.8 دج	6 دج	7.6 دج

المطلوب :

1. صياغة النموذج الرياضي الذي يسمح بالمزج بين الموارد بأقل تكلفة ممكنة؟

2. أوجد النموذج المقابل لهذه المسألة؟

حل التمرين رقم 02:

1. النموذج الرياضي (الأصلي):

أ) الترميز: x_1: كمية المورد A

x_2: كمية المورد B

x_3: كمية المورد C

x_4: كمية المورد D

x_5: كمية المورد E

ب-دالة الهدف:

$$\min[Z] = 4.1x_1 + 4.3x_1 + 5.8x_3 + 6x_4 + 7.6x_5$$

ج) القيود:

$$s/c\begin{cases} 0.1x_1 + 0.1x_2 + 0.4x_3 + 0.6x_4 + 0.3x_5 \geq 0.3 \\ 0.1x_1 + 0.3x_2 + 0.5x_3 + 0.3x_4 + 0.3x_5 \geq 0.3 \\ 0.8x_1 + 0.6x_2 + 0.1x_3 + 0.1x_4 + 0.4x_5 \geq 0.4 \end{cases}$$

د) شرط عدم السلبية:

$$x_1 \text{،} x_2 \text{،} x_3 \text{،} x_4 \text{،} x_5 \geq 0$$

النموذج المقابل:

أ) الترميز: y_1: كمية الحديد المراد بيعها.

y_2: كمية الصلب المراد بيعها.

y_3: كمية الرصاص المراد بيعها.

ب)دالة الهدف:

$$\max[Z] = 0.3y_1 + 0.3y_2 + 0.4y_3$$

ج) القيود:

$$s/c\begin{cases} 0.1y_1 + 0.1y_2 + 0.8y_3 \le 4.1 \\ 0.1y_1 + 0.3y_2 + 0.6y_3 \le 4.3 \\ 0.4y_1 + 0.5y_2 + 0.1y_3 \le 5.8 \\ 0.6y_1 + 0.1y_2 + 0.8y_3 \le 6 \\ 0.3y_1 + 0.3y_2 + 0.4y_3 \le 7.6 \end{cases}$$

د) شرط عدم السلبية :

$$y_1 ،y_2 ،y_3 \ge 0$$

تمرين رقم 03: لدينا النموذج الرياضي التالي:

$$\min[Z] = 3x_1 + 7x_2 - 5x_3$$

$$s/c\begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_3 \ge 4 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 2 \end{cases}$$

$$x_1 ،x_2 ،x_3 \ge 0$$

المطلوب: النموذج المقابل؟

حل التمرين رقم 03:

تحويل القيد الثاني:

$$-2x_1 - 3x_2 \ge -2$$

النموذج المقابل:

$$\max[Z] = 4y_1 - 2y_2$$

$$s/c\begin{cases} y_1 \quad -2y_2 \quad \leq 3 \\ 5y_1 \quad -3y_2 \quad \leq 7 \\ y_1 \quad \leq -5 \end{cases}$$

$$y_1 \ ، y_2 \quad \geq 0$$

<u>تمرين رقم 04</u>: مصنع لإنتاج الأثاث، ينتج نوعين من المنتوجات: طاولات و كراسي.

- يمر المنتوجين بورشتي إنتاج: ورشة القص ، وورشة التركيب.

- تستغرق الطاولات 2 سا في ورشة القص و 4سا في ورشة التركيب.
- تستغرق الكراسي 1سا في ورشة القص و 0.5 سا في ورشة التركيب.
- طاقة ورشة القص لا تقل عن 10 ساعات.
- طاقة ورشة التركيب لا تتجاوز 9 ساعات.

المطلوب:

1. نموذج البرمجة الخطية بحيث أن الربح الوحدي للطاولات 5 دج، والربح الوحدي للكراسي 4 دج؟
2. النموذج المقابل لهذه المسألة ؟

<u>حل التمرين رقم 04</u>:

1-نموذج البرمجة الخطية:

أ) الترميز: x_1: الكمية المنتجة من الطاولات

x_2: الكمية المنتجة من الكراسي

ب) دالة الهدف:

$$\max[Z] = 5x_1 \quad + 4x_2$$

ج) القيود:

$$s/c\begin{cases} 2x_1 & + x_2 & \leq 10 \\ 4x_1 & + 0.5x_2 & \leq 9 \end{cases}$$

د) شرط عدم السلبية: $x_1 \ ، x_2 \ \geq 0$

- –النموذج المقابل :

$$\min[Z] = 10y_1 + 9y_2$$

$$s/c\begin{cases} 2y_1 & + 4y_2 & \geq 5 \\ y_1 & + 0.5y_2 & \geq 4 \end{cases}$$

$$y_1 \ ، y_2 \ \geq 0$$

المحور الرابع : مسائل النقل

1) تعريف نموذج النقل

2) الصيغة الرياضية لنموذج النقل

3) طرق حل مسائل النقل

مسائل النقل

تعتبر مسائل النقل من المواضيع الهامة في بحوث العمليات، ومن المشاكل الخاصة في البرمجة الخطية، باعتبارها تهدف أيضا إلى الوصول إلى الأمثلة بوجود مجموعة من القيود الخطية. تعتبر مسألة النقل احدى تطبيقات البرمجة الخطية التي تهتم بتوزيع المنتجات من مصادر العرض الى مصادر الطلب بأقل تكلفة ممكنة.

1) تعريف نموذج النقل:

نموذج النقل عبارة عن طريقة لتوزيع أو نقل منتجات أو خدمات من عدة مصادر أو منتجين (مصانع، مخازن...) تمثل الكميات المعروضة إلى عدة مراكز استقبال أو مستهلكين (زبائن) تمثل الكميات المطلوبة بأقل تكاليف ممكنة

- قبل تطبيق نموذج النقل لحل أي مشكلة، يجب التأكد من توفر الشروط التالية:

وجود مجموعة من الطاقات و التي تسمى بالمصادر.

أن يكون هناك استغلال لهذه الطاقات.

يجب أن تتساوى مجموع الطاقات (العرض) مع مجموع المطلوب منها (الطلب).

أن تكون تكلفة أو ربح أو وقت لكل من الطاقات المعروضة بالنسبة لطلب ما.

وجود هدف سواء أعلى ربح(max)أو أدنى تكلفة(min).

تجانس الموارد (نفس وحدة القياس).

2) الصيغة الرياضية لنموذج النقل:

- بافتراض وجود عدد من المصادر الإنتاجية (مراكز التوزيع n)، وعدد من المراكز المستقبلة (مراكز الاستلام m) فإن النموذج الرياضي لمسائل النقل يتكون من مايلي:

1)دالة الهدف: هي عبارة عن تدنئة التكاليف المترتبة عن النقل، تكتب وفق الصيغة الرياضية التالية :

$$\text{Min } Z=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} C_{ij}\, X_{ij}$$

2) القيود: تتمثل في قيود العرض و قيود الطلب

1)قيود العرض: تساوي الكميات المعروضة من المراكز مع طاقتها الإنتاجية و تكتب على الشكل التالي:

$$\sum_{j=1}^{m} X_{ij} = a_i$$

$$\begin{cases} X_{11} + X_{12} + \dots\dots\dots + X_{1n} = a_1 \\ X_{21} + X_{22} + \dots\dots\dots + X_{2n} = a_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ X_{m1} + X_{m2} + \dots\dots\dots + X_{mn} = a_m \end{cases}$$

2)قيود الطلب: و تكتب على الشكل التالي:

$$\sum_{i=1}^{n} X_{ij} = b_j$$

$$\begin{cases} X_{11} + X_{21} + \dots\dots\dots + X_{m1} = b_1 \\ X_{12} + X_{22} + \dots\dots\dots + X_{m2} = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ X_{1n} + X_{2n} + \dots\dots\dots + X_{mn} = b_m \end{cases}$$

3)شرط عدم السلبية: لا يمكن نقل كميات سالبة و بالتالي تكون موجبة أو تساوي الصفر: $x_{ij} \geq 0$

حيث :

C_{ij}: التكلفة الوحدوية لنقل المنتجات.

X_{ij}:الكمية المعروضة أو الموزعة من المصدر (i) إلى المستهلك (j).

a_i :الكميات المعروضة

b_j : الكميات المطلوبة

3) طرق حل مسائل النقل:

- نموذج النقل يحتوي على (n+m) معادلة و (n×m) متغير, فإن نموذج النقل تتم دراسة معطياته في جدول النقل كما يلي:

مراكز الاستلام / مراكز التوزيع	B_1	B_2	. . . . →	B_m	كمية العرض
A_1	c_{11} X_{11}	c_{12} X_{12}	. . . .	c_{1n} X_{1m}	a_1
A_2	c_{21} X_{21}	c_{22} X_{22}	. . . .	c_{2n} X_{2m}	a_1
⋮ ↓	⋮	⋮	⋮ ⋮ ⋮ ⋮	⋮	⋮
A_n	c_{n1} X_{n1}	c_{n2} X_{n2}	. . . .	c_{nn} X_{nm}	a_n
كمية الطلب	b_1	b_2	. . . .	b_m	

- لإيجاد الحل الأمثل لمسألة النقل، هناك مرحلتين أساسيتين:

المرحلة الأولى: إيجاد الحل الابتدائي الممكن، و هناك ثلاثة طرق و هي:

1- طريقة الزاوية الشمالية الغربية.

2- طريقة التكلفة الدنيا

3- طريقة فوجل التقريبية

المرحلة الثانية: مرحلة اختبار و تحسين الحل الابتدائي بطريقتين:

1- طريقة المسار المتعرج.

2- طريقة عوامل الضرب (طريقةModi المعدلة)

أولا :مرحلة إيجاد الحل الأساسي

1- طريقة الزاوية الشمالية الغربية: يقصد بالزاوية الشمالية الغربية أول خانة في جدول النقل الى الأعلى وهي من أسهل الطرق غير أنها لا تستند على منطق علمي في توزيع الكميات لأنها لاتعتمد على التكاليف في تشغيل الخلايا من العرض الى الطلب و انما تعتمد على موقع الخلايا و تلبية الطلبات فقط.

يبدأ الحل في طريقة الزاوية الشمالية بآتباع الخطوات التالية:

-نبدأ بتوزيع أول خلية في الجدول و هي الخلية الشمالية الغربية و هي الخلية (1-1) على الكمية المطلوبة مع حذف الكمية من العرض.

-ننتقل الى الخلية الموالية في تفس السطر اذا لم نستطيع تلبية كل الطلب, اما اذا تم تلبية الطلب ننتقل للسطر الثاني يعني الخلية (2-2)

-يتم تكرار نفس الخطوات حتى إتمام عملية النقل.

مثال : لدى إحدى الشركات ثلاثة مخازن من مواقع مختلفة، كما أن لها مركزين تسويقين. تكاليف نقل الوحدة الواحدة من السلع (بالدينار)وحجم التخزين لكل مخزون و الاحتياجات لكل مركز تسويقي ملخص في الجدول التالي:

الاستلام / التوزيع	B1	B2	**كمية العرض**
A1	4	2	**60**
A2	7	5	**40**
A3	3	10	**70**

كمية الطلب	**105**	**65**	**170**

المطلوب :حل هذه المسألة بطريقة الزاوية الشمالية الغربية؟

حل المثال : نبدأ بتوزيع الطلب ابتداء من الخلية الواقعة في الركن الشمالي الغربي (الصف و العمود الأول) مع التحقق من شرط كمية العرض = كمية الطلب

الاستلام / التوزيع	B1	B2	**كمية العرض**
A1	**4** / **60**	2 / _	~~60~~ 0
A2	**7** / **40**	5 / _	~~40~~ 0
A3	**3** / **5**	**10** / **65**	~~65~~ ~~70~~ 0
كمية الطلب	~~105~~ ~~45~~ ~~5~~ 0	~~65~~ 0	170

- نلاحظ أنه تم تلبية جميع طلبيات للمراكز التسويقية ، و بالتالي التكلفة الكلية بطريقة الركن الشمالي الغربي كالتالي:

$$\boldsymbol{Min\ z = 60(4)+40(7)+5(3)+65(10)}$$

$$\boldsymbol{Min\ z=1185}$$

2– **طريقة التكلفة الدنيا**: تأخذ هذه الطريقة بعين الاعتبار تكلفة النقل من مراكز التوزيع إلى مراكز الاستلام، وذلك باختيار الخانة التي تتضمن أقل التكاليف.

• نأخذ نفس المثال السابق ، ونطبق طريقة التكلفة الدنيا و ذلك ببدأ التوزيع من الخلية التي تحتوي على أقل تكلفة.

الاستلام / التوزيع	B1		B2		كمية العرض
A1	4	-	**2**	**60**	~~60~~ 0
A2	**7**	**35**	**5**	**5**	~~35~~ ~~40~~ 0
A3	**3**	**70**	10	_	~~70~~ 0
كمية الطلب	~~105~~ ~~70~~ ~~35~~ 0		~~65~~ ~~5~~ 0		170

من خلال الحل تم التحصل على تكلفة النقل الكلية بطريقة التكلفة الدنيا التالية:

$$Min\ z= 60(2)+35(7)+5(5)+70(3)$$

$$Min\ z =600$$

3– **طريقة Vogel فوجل** : يطلق عليها أيضا طريقة الجزاء أو العقاب و تعتبر هذه الطريقة قريبة إلى الحل الأمثل من الطريقتين السابقتين. يتم إتباع الخطوات التالية في هذه الطريقة:

–حساب الفرق بين أقل تكلفتين في كل صف و في كل عمود.

–تحديد الصف أو العمود الذي يمتلك أكبر فرق تكلفة(أعلى عقاب).

– نختار الخلية التي تحمل أقل فرق تكلفة للتوزيع.

ملاحظة : في حالة وجود أقل تكلفتين متساويتين فإننا أيضا نحسب الفرق بينهما و هو الصفر.

- نأخذ نفس المثال السابق، و نطبق طريقة **Vogel**:

الاستلام التوزيع	B1	B2	كمية العرض	فرق الأسطر
A1	4 –	**2** **60**	~~60~~ 0	2-4=2
A2	**7** **35**	**5** **5**	~~5~~ ~~35~~ ~~40~~ 0	7-5=2
A3	**3** **70**	10 –	~~70~~ 0	3-10=7
كمية الطلب	~~105~~ ~~35~~ 0	~~65~~ ~~5~~ 0	170 170	
فرق الأعمدة	4-3=1 7-4=3	5-2=3		

من خلال الحل تم التحصل على التكلفة التالية بطريقة فوجل:

Min z =35(7)+60(2)+70(3)+5(5)

Min z=600

نلاحظ ان تكلفة النقل بطريقة التكلفة الدنيا و طريق فوجل أقل من التكاليف بطريقة التكلفة الشمالية الغربية لأن هذه الطريقة لا تأخذ بعين الاعتبار التوزيع عن طريق التكاليف و انما التوزيع لتلبية الطلب فقط, لهذا السبب نمر لمرحلة اختبار و تحسين الحل.

المرحلة الثانية: تحسين الحل الابتدائي: يعتبر الحل بالطرق السابقة حل أولي , لذلك نستعمل طرق المرحلة الأولى للوصول الى الحل الأمثل.

1- طريقة المسار المتعرج: تسمى أيضا بطريقة التخطي و ترتكز هذه الطريقة على تقييم كل مرحلة فارغة في جدول الحل الأولي. لتطبيق هذه الطريقة نتبع الخطوات التالية:

أ) التحقق من شرط أن الخلايا المملوءة يجب أن تساوي دائما:

عدد الخلايا المملوءة = عدد الصفوف + عدد الأعمدة -1.

عدد الخلايا المملوءة =(m+n-1).

ب) رسم المسارات المغلقة للخلايا الفارغة (يبدأ المسار المغلق بعلامة موجبة للخلية المراد تقييمها ثم تليها علامة سالبة و هكذا لجميع الخلايا التي يتشكل منها المسار.

ج) حساب التكلفة الغير المباشرة للخلية المراد تقييمها , وذلك بجمع تكلفة خلايا المسار. (إذا كانت هذه التكلفة سالبة معنى ذلك أن هذه الخلية تساهم في تخفيض التكاليف).

د) يتم استبدال الخلية الفارغة بالخلية المملوءة التي تحمل إشارة سالبة في نفس المسار.

هـ) نكرر نفس الخطوات السابقة حتى الحصول على الحل الأمثل .

نأخذ نفس المثال السابق، ونطبق طريقة المسار المتعرج كما يلي:

1- حساب عدد الخلايا المملوءة =(m+n-1) =(3+2-1)=4

2- رسم المسارات المغلقة: $X_{12} = +2 - 4 + 3 - 10 = -9$

$$X_{22} = +5 - 7 + 3 - 10 = -9$$

يلاحظ وجود قيمتين سالبتين، نبدأ بالخلية (X_{12}) و عليه تملأ الخلية من خلال الخلايا المناظرة لها

بأكبر كمية ممكنة من الوحدات بهدف تقليل التكاليف.

	B_1	B_2
A_1	4 - 60	2 + _
A_2	7 40	5 _
A_3	3 + 5	10 65 -

بعد إجراء عملية التحويل نتحصل على الجدول التالي:

	B_1	B_2
A_1	4 _	2 60
A_2	7 40	5 _
A_3	3 65	10 5

يصبح مجموع التكاليف بعد تحسين الحل كالتالي:

Min z =60(2)+40(7)+5(10)+40(7)+60(2)

Min z=645

تعتبر هذه التكلفة أقل من 1185 دج في الحل الأولي بطريقة الزاوية الشمالية الغربية.

- نكرر نفس الخطوات السابقة:

1- نرسم المسار المغلق:

	B_1	B_2
A_1		60
A_2	− 40	+
A_3	+5	5−

$$X_{11} = +4 - 2 + 10 - 3 = +9$$
$$X_{22} = +5 - 10 + 3 - 7 = -9$$

- نلاحظ أن أقل قيمة سالبة هي ل (X_{22}) و بالتالي نقوم بنقل 5 وحدات للخلية المناظرة لها، لنتحصل على الجدول التالي:

	B_1	B_2
A_1	4 –	2 60
A_2	7 35	5 5
A_3	3	10

	70	_

- تصبح التكلفة الكلية كما يلي: ***60(2)+5(5)+35(7)+70(3) =600 دج***

نكرر نفس الخطوات السابقة: $X_{11} = +4 - 2 + 5 - 7 = 0$

$$X_{32} = +10 - -3 + 7 - 5 = +9$$

- نلاحظ أن القيم التي تحصلنا عليها هي (9+ ،0) مما يدل على عدم وجود أية قيمة سالبة و بالتالي فإن

الحل الأمثل المتوصل اليه هو ***600 دج***.

2- طريقة التوزيع المعدلة (طريقةModi المعدلة):

تعتبر هذه الطريقة أسهل من طريقة المسار المتعرج، إذ لا تتطلب رسم جميع المسارات.

تتلخص خطوات هذه الطريقة فيما يلي:

أ) التأكد من أن عدد الخلايا المملوءة =(m+n-1) .

ب) يتم تكوين معادلة لكل خلية مملوءة في جدول الحل الأول.

$$C_{ij} = U_i + V_j$$

بحيث: U_i: المتغير الخاص بالصفi

V_j:المتغير الخاص بالعمودj

C_{ij}:تكلفة الخلية التي تقع في الصف i و العمودj .

ج) حساب التكلفة الغير المباشرة للخلايا الفارغة وفقا للمعادلة التالية:

$$(C_{ij})' = C_{ij} - U_i - V_j$$

د) نختار الخلية الفارغة التي تحمل القيمة الأشد سلبية، و يتم دراسة مسارها.

هـ) يعاد تكرار نفس العملية إلى غاية الوصول إلى قيم موجبة أو تساوي الصفر.

* نأخذ نفس المثال السابق و نطبق طريقة التوزيع المعدلة.

	B_1	B_2
A_1	4 60	2 _
A_2	7 40	5 _
A_3	3 5	10 65

أ) عدد الخلايا المملوءة = m+n-1 =1-2+3=4 و بالتالي يتم تكوين المعادلات الموالية.

ب) تكوين معادلات الخلايا المملوءة: (لتسهيل العمليات نفترض أن أحد المتغيرات =0)

$$①C_{11} = U_1 + V_1 = 4 \Rightarrow U_1 = 0 \Rightarrow V_1 = 4$$

$$②C_{21} = U_2 + V_1 = 7 \ \Rightarrow V_1 = 4 \Rightarrow U_2 = 3$$

$$③C_{31} = U_3 + V_1 = 3 \Rightarrow V_1 = 4 \Rightarrow U_3 = -1$$

$$④C_{32} = U_3 + V_2 = 10 \Rightarrow \ U_3 = -1 \Rightarrow V_2 = 1$$

من المعادلات السابقة نتحصل على الجدول التالي:

V_j / U_i	4	11
0	4	-
3	7	-
1-	3	10

حساب التكاليف الغير المباشرة للخلايا الفارغة:

$$\mathrm{C}_{12} = \mathrm{C}_{12} - \mathrm{V}_2 - \mathrm{U}_1 = 2 - 11 - 0 = -9$$

$$\mathrm{C}_{22} = \mathrm{C}_{22} - \mathrm{V}_2 - \mathrm{U}_2 = 5 - 11 - 3 = -9$$

- يلاحظ وجود قيمتين سالبين، هذا ما يعني أن الحل غير أمثل ، و بالتالي نستمر في الحل حتى الوصول إلى الحل الأمثل.
- يتم نقل أقل عدد من الوحدات في الخلية السابقة في المسار المغلق ، لتضاف أو تطرح حسب الإشارة.

A_1	4 60	2 _
A_2	7 _	5 40
A_3	3 45	10 25

- نكرر نفس الخطوات السابقة ، نتحصل على معدلات الخلايا المملوءة كما يلي:

$$C_{11} = U_1 + V_1 = 4 \Rightarrow V_1 = 4$$

$$C_{22} = U_2 + V_2 = 5 \Rightarrow U_2 = -5$$

$$C_{31} = U_3 + V_1 = 4 \Rightarrow U_3 = 0$$

$$C_{32} = U_3 + V_2 = 10 \Rightarrow V_2 = 10$$

- نتحصل على الجدول الموالي:

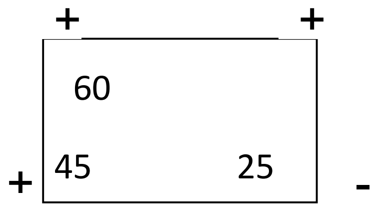
V_j / U_i	4	01
0	4	-
-5	-	5
0	3	10

حساب التكلفة الغير المباشرة للخلايا الفارغة:

$$C_{12} = -8$$

$$C_{21} = +8$$

يلاحظ أن الخلية C_{12} تحمل قيمة سالبة، و عليه يتم اختبار هذه الخلية و تكوين المسار المغلق.



إذن سيتم نقل 25 وحدة بين خلايا المسار المغلق (طرح أو إضافة حسب الإشارة).

	B_1	B_2
A_1	4 / 35	2 / 25
A_2	7 / _	5 / 40
A_3	3 / 70	10 / _

التكلفة الكلية ***=(4)35+(2)25+ (5)40+(3)70 =600 دج***

و هي نفس التكلفة التي تم التوصل إليها في طريقة المسار المتعرج، و التي تمثل الحل الأمثل بعد تحسينه.

تمارين محلولة حول مسائل النقل

تمرين رقم 01:

تمتلك إحدى (A_1 ،A_2،A_3)تحتوي على كميات مختلفة من البضاعة،و المطلوب تسويقها إلى ثلاثة وكلاء المؤسسات التجارية ثلاثة مخازن , الكميات متوفرة في الجدول التالي:

التوزيع \ الاستلام	B1	B2	B3	كمية العرض
A1	5	1	8	12
A2	2	4	0	14
A3	3	6	7	4
كمية الطلب	9	10	11	**30**

المطلوب: ما هو مجموع تكاليف النقل للسلع من المصادر إلى المراكز باستخدام:

1) طريقة الزاوية الشمالية الغربية؟

2) طريقة التكلفة الدنيا؟

3) طريقة Vogel التقريبية؟

حل التمرين رقم 01:

1) **طريقة الزاوية الشمالية الغربية**:

الاستلام / التوزيع	B1	B2	B3	كمية العرض
A1	5 / **9**	1 / **3**	8 / –	~~12~~ ~~3~~ ~~0~~
A2	2 / -	4 / **7**	0 / **7**	~~14~~ ~~7~~ 0
A3	3 / –	6 / –	7 / **4**	4 0
كمية الطلب	~~9~~ 0	~~10~~ ~~7~~ 0	~~11~~ 4 0	30

Min z= 7(4)+7(0)+7(4)+3(1)+9(5)

Min z=104

2) طريقة التكلفة الدنيا:

الاستلام / التوزيع	B1	B2	B3	كمية العرض
A1	5 / **2**	1 / **10**	8 / –	~~12~~ ~~2~~ 0

A2	2	**3**	4	–	0	**11**	~~14~~ ~~3~~ 0
A3	3	**4**	6	-	7	-	4 0
كمية الطلب	~~9~~ ~~7~~ 4 0		~~10~~ 0		~~11~~ 0		**30**

Min z = 5(2)+1(10)+2(3)+3(4)+0(11)

Min z =38

3– طريقة Vogel التقريبية:

الاستلام / التوزيع	B1		B2		B3		كمية العرض	فرق الصفوف
+	5	**2**	1	**10**	8	–	~~12~~ ~~2~~ 0	5-1=4
A2	2	**3**	4	–	0	**11**	~~14~~ ~~3~~ 0	2-0=2
A3	3	**4**	6	–	7	–	4 0	6-3=3
كمية الطلب	~~9~~		~~10~~ 0		~~11~~ 0		**30**	

	~~6~~ ~~2~~ 0				
فرق الأعمدة	3-2=1 3-2=1 3	4-1=3 _ _	7-0=7 _ _		

$$Min\ z = 5(2)+1(10)+2(3)+3(4)+0(11)$$

$$Min\ z = 38$$

نلاحظ أن تكلفة النقل بطريقة التكلفة الدنيا و طريقة فوجل أقل من تكلفة النقل بطريقة الزاوية الشمالية الغربية.

تمرين رقم 02: ليكن لدينا النموذج التالي:

الاستلام / التوزيع	B1	B2	B3	كمية العرض
A1	2	5	4	10
A2	3	7	6	10
A3	1	8	4	10
كمية الطلب	10	15	10	30 35

المطلوب: ما هو مجموع تكاليف النقل باستخدام طريقة الزاوية الشمالية الغربية؟

حل التمرين رقم 02:

1- **تعديل النموذج** : لأن كمية العرض< كمية الطلب ، لذلك نضيف سطر تكاليفه مساوية للصفر.

الحل بطريقة الزاوية الشمالية الغربية:

الاستلام / التوزيع	B1	B2	B3	كمية العرض
A1	2	5	4	10
A2	3	7	6	10
A3	1	8	4	10
A4	**0**	**0**	**0**	**5**
كمية الطلب	10	15	10	**35** **35**

$$Min\ z = 10(2)+10(7)+8(5)+5(4)+5(0)$$

$$Min\ z = 150$$

تمرين رقم 03: تقوم مؤسسة للتمور بتسويق التمور انطلاقا من ثلاثة موانئ رئيسية الى ثلاثة دول , حيث أن الكميات الممكن تصديرها حسب الموانئ هي:

-ميناء الجزائر: الكميات الممكن تصديرها عبره هي 80 طن

-ميناء وهران : الكميات الممكن تصديرها عبره هي 40 طن

-ميناء عنابة: الكميات الممكن تصديرها عبره هي 60 طن

اما كميات الطلب لكل دولة فهي:

-الولايات المتحدة الامريكية : حجم الطلب هو 70 طن

-كندا: حجم الطلب هو 40 طن

-أستراليا: حجم الطلب هو 70 طن

تكلفة نقل القنطار الواحد من التمور بالدولار الأمريكي لكل ميناء الى كل دولة موضحة في الجدول التالي:

	الولايات المتحدة الأمريكية	كندا	استراليا
ميناء الجزائر	5	6	7
ميناء وهران	9	5	11
ميناء عنابة	13	12	8

المطلوب:1- انطلاقا من معطيات مسالة النقل شكل جدول النقل الموافق للمسالة؟

2- أكتب البرنامج الرياضي للمسألة مع العلم أن المؤسسة تهدف لتصدير التمور بأقل تكلفة ممكنة؟

3-أوجد الحل الأساسي المقبول باستخدام طريقة الزاوية الشمالية و طريقة التكلفة الدنيا و كذا قيمة دالة الهدف الموافقة لكل طريقة؟

حل التمرين رقم 03:

1-تشكيل جدول النقل الموافق للمسألة:

التوزيع \ الاستلام	B1	B2	B3	كمية العرض
A1	5 X_{11}	6 X_{12}	7 X_{13}	80
A2	9 X_{21}	5 X_{22}	11 X_{23}	40
A3	13 X_{31}	12 X_{32}	8 X_{33}	60
كمية الطلب	70	40	70	**180**

2) البرنامج الرياضي لمسألة النقل:

1–دالة الهدف:

$$Min\ z=5x_{11}+6x_{12}+7x_{13}+9x_{21}+5x_{22}+11x_{23}+13x_{31}+12x_{32}+8x_{33}$$

2–القيود:

أ–قيود العرض:

$$\begin{cases} X_{11}+x_{12}+x_{13}=80 \\ X_{21}+x_{22}+x_{23}=40 \\ X_{31}+x_{32}+x_{33}=60 \end{cases}$$

ب-قيود الطلب:

$$\begin{cases} X_{11}+x_{21}+x_{31}=70 \\ X12+x_{22}+x_{32}=40 \\ X_{31}+x_{32}+x_{33}=70 \end{cases}$$

3-شرط عدم السلبية:

$$x_{ij} \geq 0$$

-إيجاد الحل الأساسي بطريقة الزاوية الشمالية الغربية:

الاستلام / التوزيع	B1		B2		B3		كمية العرض
A1	5	**70**	6	10	7	-	~~80~~ ~~10~~ ~~0~~
A2	9	_	5	30	11	10	~~40~~ ~~10~~ 0
A3	13		12		8		

		_		-		60	~~60~~ 0
كمية الطلب	~~70~~ 0		~~40~~ ~~30~~ 0		~~70~~ ~~60~~ 0		180

Min z = 70(5)+10(6)+5(30)+10(11)+60(8)

Min z =1150

4-إيجاد الحل الأساس بطريقة التكلفة الدنيا:

الاستلام / التوزيع	B1		B2		B3		كمية العرض
A1	5	70	6	-	7	10	~~80~~ ~~10~~ ~~0~~
A2	9	_	5	**40**	11	-	~~40~~ 0
A3	13	-	12	_	8	60	~~60~~ 0
كمية الطلب	~~70~~ 0		~~40~~ 0		~~70~~ ~~60~~ 0		180

Min z = 70(5)+10(7)+40(5)+ 60(8)

Min z =1100

قائمة المراجع

قائمة المراجع بالعربية:

-أحمد عبد اسماعيل الصفار، ماجدة عبد اللطيف التميمي (2007) "بحوث العمليات ، تطبيقات على الحاسوب", دار المناهج للنشر و التوزيع، الطبعة الأولى، عمان، الأردن.

-بوكليخة لطيفة (2022-2023),"محاضرات في رياضيات المؤسسة", جامعة أبي بكر بلقايد, تلمسان.

- حسين محمود الجنابي (2010),"الأحدث في بحوث العمليات" , دار الحامد للنشر و التوزيع, الأردن.

-دلال صادق الجواد، حميد ناصر الفتال (2008) ،"بحوث العمليات"، دار اليازوري للنشر و التوزيع، عمان، الأردن.

-سهيلة عبد الله سعيد(2007), "الجديد في الأساليب الكمية و بحوث العمليات" , دار حامد للنشر و التوزيع,عمان, الاردن.

-شمعون شمعون (2005), "الرياضيات الاقتصادية" ,ديوان المطبوعات الجزائرية, الجزائر.

- شفيق العتوم (2006)," بحوث العمليات", دار المناهج للنشر و التوزيع,عمان, الاردن.

-خليل حمدان (2004), " مقدمة في البحوث العمليات " ، دار وائل للنشر ، الطبعة الرابعة، الأردن.

-محمد راتول (2006), " بحوث علميات " ,ديوان المطبوعات الجامعية ، الجزائر.

- محمود الفياض, عيسى قدادي (2007), "بحوث العمليات" ,دار اليازوري ,الأردن.

- محمد إسماعيل بلال (2005) ، "بحوث العمليات ، استخدام الأساليب الكمية في صنع القرار" ،دار الجامعة الجديدة ، الأردن.

-منعم زمزير الموسوي,(2016), "بحوث العمليات, مدخل علمي لاتخاذ القرارات", دار وائل للنشر, الأردن.

قائمة المراجع بالفرنسية:

- Aiden .M , Oukacha .B (2005) « Recherche Opérationnelle », édition Bleues, Alger
- Azoulay .P, Dassonville .P (1976) « Recherche opérationnelle de gestion », Presse universitaire de France ,paris.
- Moisdon .J.C, Nakhla.M (2010), « Recherche opérationnelle , méthode d'optimisation en gestion »,Presses des mines Paris Tech, France .
- Roseaux (2004) « Recherche opérationnelle », Tome 1, édition Dunod , Paris.
- Thiel.D (1990) «Recherche opérationnelle et management des entreprises », édition Economica , Paris.

الفهرس