مثال 8 : الآتي توزيع تكراري لإنتاج مصنع معين (طن) من سلعة معينة لأحد الأيام موزع حسب عدد المكائن العاملة في ذلك اليوم وعدد ساعات العمل المحددة لإشغال كل ماكنة حسب مواصفات المنشأ ، يطلب حساب متوسط انتاجية الماكنة الواحدة في هذا المصنع.

فئات الانتاج	عدد المكائن Fi	عدد الساعات الاوزان wi	مركز الفئة xi	wi fi	wi fi xi
2 – 4	4	6	3	(6) (4) = 24	(24) (3) = 72
4 – 6	5	5	5	(5) (5) = 25	(25) (5) = 125
6 – 8	6	6	7	(6) (6) = 36	(36) (7) = 252
8 – 10	3	4	9	(3) (4) = 12	(12) (9) = 108
10 – 12	2	4	11	(2) (4) = 8	(8) (11) = 88
	20			105	645

$$\bar{x}_w = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i f_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i f_i} = \frac{645}{105} = 6.143$$

5- الوسط التربيعي Quadratic mean :

يعرف الوسط التربيعي بأنه الجذر التربيعي الموجب لمتوسط مربعات قيم المتغير العشوائي (x) كما أن قيمة الوسط التربيعي هي قيمة موجبة دائماً استناداً إلى نوع البيانات ، ويرمز له بالرمز (Q) نسبة إلى Quadratic.

أ- حساب الوسط التربيعي في حالة البيانات غير المبوبة :

يحسب الوسط التوافقي وفق الصيغة التالية بعد تربيع قيم المشاهدات وأخذ مجموعها وكما يلي :

$$Q = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}}$$

مثال 9 : جد الوسط الحسابي التربيعي للبيانات التالية :

2 , 3 , 4 , 5 , 6

الحل :

$$Q = \sqrt{\frac{(2)^2+(3)^2+(4)^2+(5)^2+(6)^2}{5}} = \sqrt{\frac{4+9+16+25+36}{5}} = \sqrt{\frac{8}{5}} = \sqrt{1.6} = 1.2$$

ب- الوسط التربيعي في حالة البيانات المبوبة :

ويحسب ووفق الصيغة التالية ، حيث ان fi تمثل عدد التكرارات

$$Q = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{m} f_i x_i^2}{\sum_{i=1}^{m} f_i}}$$

مثال 10 :

التوزيع تكراري التالي يمثل عدد المشاركين في دورات التعليم المهني التابع لوزارة الصناعة موزعين حسب عدد أيام المشاركة لكل دورة.

المطلوب : أوجد الوسط التربيعي لعدد أيام المشاركة.

فئات الانتاج	عدد المشاركين fi	مركز الفئة xi	xi^2	$fi\ xi^2$
10 – 20	2	15	$(15)^2 = 225$	(2) (225) = 450
20 – 30	3	25	$(25)^2 = 625$	(3) (625) = 1875
30 – 40	4	35	$(35)^2 =$ 1225	(4) (1225) = 4900
40 – 50	10	45	$(45)^2 =$ 2025	(10) (2025) = 20250
50 - 60	36	55	$(55)^2 =$ 3025	(36) (3025) = 108900
60 - 70	14	65	$(65)^2 =$	(14) (4225) = 59150

			4225	
المجموع	69			195525

$$Q = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{m} f_i x_i^2}{\sum_{i=1}^{m} f_i}} = \sqrt{\frac{195525}{69}} = \sqrt{2833.7} \quad Q = 53.23$$

مميزات الوسط التربيعي :

1- يمكن إيجاده إذا كانت أطوال الفئات متساوية أو غير متساوية.

2- بساطة فكرته وخضوعه للعمليات الجبرية كما أن عملية حسابه تستند إلى كلفة البيانات المتاحه

عيوب الوسط التربيعي :

1- لا يمكن إيجاده في حالة التوزيعات التكرارية المفتوحة من طرف واحد أو طرفين.

2- لا يمكن حساب قيمته لبيانات متغير وصفي.

3- لا يمكن تعيينه هندسياً.

4- لا يمكن تحديد قيمته في حالة فقدان إحدى قيم العينة.

2- مقاييس توسط أخرى :

- مقاييس توسط أخرى :

1- المنوال (MO) the mode

المنوال لمجموعة من القيم هو القيمة المفردة التي تتكرر أكثر من بقية المفردات في مجموعة القيم ، أي أن المنوال هو القيمة الأكثر تكراراً بين المفردات.

طرق إيجاد المنوال :

أ- في حالة البيانات غير المبوبة :

لتكن $x_1 , x_2 , \dots x_n$ قياسات عينة من المفردات حجمها n وافترض أن x_i قيمة من قيم المجموعة تتكرر أكثر من غيرها ، عندئذ وحسب تعريف المنوال فإن x_i تمثل المنوال لهذه المجموعة.

مثال 12 :

للبيانات التالية جد المنوال :

20 , 40 , 60 , 80 , 20 , 90 , 20 , 50

واضح أن العدد 20 تكرر ثلاث مرات فالمنوال هو العدد (20) أي أن $x_i = 20$.

مثال 13 :

للبيانات التالية في المجاميع أدناه أوجد المنوال :

$X_i = 20 , 40 , 60 , 80$

لا يوجد قيمة للمنوال.

$X_i = 20 , 40 , 40 , 60 , 60, 80 , 90$

Mo = 40 , Mo = 60

$X_i = 20 , 20 , 20 , 40 , 40 , 60 , 80 , 90 , 90$

Mo = 20

ب- إيجاد المنوال لبيانات مبوبة :

1- في حالة المتغير المتقطع :

المنوال في هذه الحالة يمثل مركز تلك الفئة التي تقابل أكبر تكرار في التوزيع.

ملاحظة :

في حالة وجود فئتين أو أكثر تقابل نفس التكرار فأن توزيع من هذا النوع سوف يملك أكثر من قيمة للمنوال ، وكل منها تمثل مركز لتلك الفئة التي تقابل ذلك التكرار.

مثال 14 :

البيانات التالية توزيع 40 عائلة حسب الدخل الشهري لها محسوب بالآلاف الدنانير.

المطلوب : تحديد المنوال :

الحل :

نبحث عن أكبر تكرار في هذا التوزيع وهو العدد 14 المقابل للفئة 104 – 90 وعليه فأن المنوال في هذا التوزيع يكون مساوي إلى :

$$Mo = \frac{104+90}{2} = 97$$

عدد الفئات والدخل بالآلاف الدنانير	التكرار fi عدد العوائل
60 – 74	2
75 – 89	6
90 – 104	14
105 – 119	10
120 – 134	8

مع ملاحظة أنه يتم تقريب الناتج في حالة وجود كسور إلى أقرب عدد صحيح.

2- في حالة المتغير المستمر :

أفرض أن هناك توزيعاً تكرارياً عدد فئاته m مرات f_K تمثل أكبر تكرار هذا يعني أن الفئة التي تحتوي على المنوال هي الفئة المقابلة إلى f_k وأن f_{k-1} يمثل التكرارات السابقة لتكرار فئة المنوال و f_{k+1} تمثل التكرار اللاحق لتكرار فئة المنوال ، أي أن :

$$F_{k-1} < f_k < f_{k+1}$$

$$MO = a + \frac{d1}{d1+d2} * L$$

حيث ان : d_1 تكرار الفئة المنوالية – تكرار الفئة التي قبلها

d_2 تكرار الفئة المنوالية – تكرار الفئة التي بعدها

a تمثل الحد الأدنى لفئة المنوال.

L تمثل طول فئة المنوال.

مثال 15 :

الآتي توزيع تكراري لأعمار عدد من المرضى الراقدين في إحدى المستشفيات ، يطلب إيجاد العمر الشائع للمرضى في هذه المجموعة.

الحل :

إن أكبر تكرار هو 23 فأن فئة المنوال هي الفئة المقابلة لأكبر تكرار أي أن 60 – 50.

الفئات	عدد المرضى fi
أقل من 20	2
20 – 30	8
30 – 40	16
40 – 50	17
50 – 60	23
60 فأكثر	14

L = 10 , d1= 6 , d2 = 9 , a = 50

$$MO = a + \frac{d1}{d1+d2} * L$$

$$Mo = 50 + \frac{(6)}{(6)+(9)} * 10$$

$$= 50 + \frac{6}{15} * 10$$

$$= 50 + (0.4)\ 10 = 54$$

يلاحظ على الرغم من كون التوزيع مفتوح من كلال الطرفين إلا أنه أمكن إيجاد المنوال وهذه إحدى مزايا المقياس.

2- الوسيط The Median :

يعتبر الوسيط أحد مقاييس النزعة المركزية المهمه في التطبيقات الإحصائية ويعرف الوسيط بأنه تلك القيمة من قيم المتغير العشوائي (x) التي تقسم مجموعة المتغيرين إلى قسمين متساويين أي أنها قيمة (x) التي تجعل عدد القيم قبلها مساوي لعدد القيم بعدها.

<u>طرق إيجاد الوسيط :</u>

أ- إيجاد الوسيط لبيانات غير مبوبة :

لتكن $x_1 , x_2 , \dots , x_n$ تمثل قياسات مفردات عينة حجمها n ورتبت ترتيباً تصاعدياً أو تنازلياً فأن :

1- إذا كان عدد القيم فردي (n) فأن قيمة الوسيط تمثل قيمة x بعد الترتيب ، اي : $\frac{n+1}{2}$.

مثال 16 :

الآتي درجات عينة عددها تسعة من الطلبة ، جد الوسيط لهذه المجموعة :

55 , 62 , 53 , 70 , 68 , 65 , 63 , 79 , 80

الحل :

- ترتب القيم ترتيبا تصاعديا كما يلي :

- ترتيب الوسيط هو $\frac{n+1}{2} = \frac{9+1}{2} = 5$.

هذا يعني أن القيمة الخامسة هي :

قيمة الوسيط أي الدرجة Me = 65

الترتيب التصاعدي للقيم
53
55
62
63
الوسيط 65
68
70
79
80

2- إذا كان عدد القيم n زوجي فأن قيمة الوسيط تمثل الوسط الـ

$$Me = \left[x_{\frac{n}{2}+1} + x_{\frac{n}{2}} \right] / 2$$

<u>مثال 17</u> :الآتي اعمار عينة من الأفراد حجمها 12 فرد جد الوسيط لعمر الفرد في المجموعة :

الحل :25 , 23, 20 , 18 , 29 , 28 , 27 , 24.5 , 26 , 19.5 , 22 , 20

الحل: نرتب هذه القيم تنازلياً

29 , 28 , 27 , 26 , 25 , 24.5 , 23 , 22 , 20 , 20 , 19.5 , 18

القيمتان اللتان تحددان الوسيط هما :

$\frac{12}{2}+1 = 7 + \frac{12}{2} = 6$

أي القيمة السادسة والسابعة بعد الترتيب ، إذ الوسيط هو الوسط الحسابي لهاتين القيمتين :

$Me = \frac{24.5+23}{2} = 23.75$

ب- إيجاد الوسيط لبيانات مبوبة :

1- في حالة المتغير المتقطع :

أفرض وجود توزيع تكراري لبيانات متغير متقطع عدد فئاته m فإن $f_1 , f_2 , \dots , f_m$ تمثل التكرارات المقابلة لهذا التوزيع إن $f_1 , f_2 , \dots , f_m$ تمثل التكرارات المتجمعة الصاعدة المقابلة للحدود العليا لفئات التوزيع . نحدد الوسيط وهو الذي يترك نصف مجموع التكرارات قبلها والنصف الآخر بعدها ولتحديد الوسيط نقارن الوسيط مع التكرار المتجمع الصاعد ، فإذا كان :

$$F_{K-1} < \frac{\sum_{i=1}^{m} f_i}{2} < F_{k+1}$$

يقال أن فئة الوسيط هي التي تسلسلها (k+1) وإن :

$$Me = \frac{\text{الحد الأدنى لفئة الوسيط+الحد الأعلى لفئة الوسيط}}{2}$$

مثال :

الآتي توزيع تكراري لعينة من الأسر حسب عدد أفراد الاسرة.

المطلوب : حساب الوسيط لعدد أفراد الاسرة.

الحل :

إن ترتيب الوسيط :

فئات عدد الافراد	عدد الأسر f	F_i تكرار متجمع صاعد
2 – 4	6	6
5 – 7	9	15
8 – 10	12	27
11 – 13	20	47
14 – 16	14	61
17 – 19	11	72
20 - 22	8	80
	80	

$$\frac{\sum_{i=1}^{m} f_i}{n} = \frac{80}{2} = 40$$

$$F_{k-1} < \frac{\sum_{i=1}^{m} f_i}{n} < F_{k+1}$$

$$27 < 40 < 47$$

عليه فأن فئة الوسيط هي الرابعة اي التي تسلسلها (k+1) اي 11-13

$$Me = \frac{11+13}{2} = 12$$

2- إيجاد الوسيط لبيانات مبوبة / في حالة متغير مستمر :

أفرض f_1 , f_2 , ... ,f_m، التكرارات المقابلة للتوزيع ، f_1 , f_2 , ... ,f_m التكرارات المتجمعة الصاعدة المقابلة للحدود العليا لفئات التوزيع.

$\frac{\sum_{i=1}^{m} fi}{2}$ ترتيب الوسيط في التوزيع ، فإذا كان :

$$F_{K-1} < \frac{\sum_{i=1}^{m} f_i}{2} < F_{k+1}$$

يقال أن فئة الوسيط هي التي تسلسلها $_{k+1}$ وأن الوسيط يكون مساوي إلى القانون التالي :

$$Me = a + \frac{Lk}{fk}\left(\frac{\sum_{i=1}^{m} fi}{2} - F\right)$$

حيث أن :

a: تمثل الحد الأدنى لفئة الوسيط

f_k = تكرار فئة الوسيط

L_k = طول فئة الوسيط

F = التكرار المتجمع الصاعد السابق لفئة الوسيط

مثال 19 :

الآتي توزيع تكراري للدخول الشهرية لعينة من الأسر حجمها (80) أسرة ، جد الوسيط للدخل الشهري للأسر في هذه العينة :

الفئات:	100	120	140	160	180	200	220	240
عدد الأسر:	3	7	14	20	18	12	6	

الحل :

الفئات	Fi	التكرار المتجمع الصاعد Fi
100 – 120	3	3
120 – 140	7	10
140 – 160	14	24
160 – 180	20	44
180 – 200	18	62
200 – 220	12	74
220 – 240	6	80
	80	

$\frac{\sum_{i=1}^{m} fi}{2} = \frac{80}{2} = 40$

$24 < 40 < 44$

ترتيب الوسيط هو الفئة الرابعة أي الفئة 160– 180

$Me = a + \frac{bk}{fk}\left(\frac{\sum fi}{2} - F\right)$

$a = 160$, $b_k = 20$, $f_k = 20$, $F = 24$, $\sum fi = 80$

$Me = 160 + \frac{20}{20}\left(\frac{80}{2} - 24\right)$

$= 160 + 1\ (40 - 24) = 176$ دينار

العلاقة بين بعض مقاييس النزعة المركزية :

ترتبط بعض مقاييس النزعة المركزية مع بعضها بعلاقات معينة منها العلاقة بين الوسط الحسابي ، الوسيط ، المنوال ، إذ لوحظ في حالة المنحنيات المتماثلة تكون قيم المتوسطات الثلاثة متساوية ويزداد الاختلاف بين هذه القيم كلما بعد التوزيع عن التماثل ، ولكن هناك علاقة تربط بين هذه المتوسطات في حالة المنحنيات القريبة من التماثل وهي :

$$\bar{x} - Me = \frac{1}{3}(\bar{x} - Mo)$$

هذه العلاقة مهمة جداً أثناء التطبيق حيث يتعذر حساب الوسط من توزيع تكراري مفتوح من طرف أو طرفين ويمكن إيجاد الوسيط والمنوال فأن :

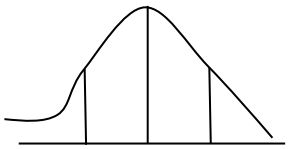
$$\bar{x} = \frac{3Me - Mo}{3}$$

وإن :

$$Me = \frac{1}{3}(2\bar{x} + Mo)$$

$$Mo = 3Me - 2\bar{x}$$

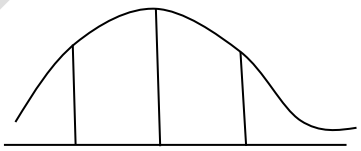
ويمكن توضيح العلاقة بين هذه الأوساط بالرسوم التالية :



$\bar{x}$ Me Mo

$\bar{x} < Me < Mo$

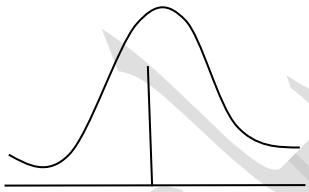
منحنى ملتوي التواء سالب من جهة اليسار



Mo Me $\bar{x}$

$Mo < Me < \bar{x}$

منحنى ملتوي التواء موجب من جهة اليمين

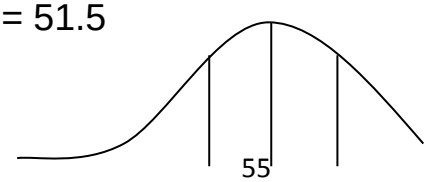


$Mo = \bar{x} = Me$

الرسم متماثل

<u>مثال 20</u> : تعذر في أحد التوزيعات القريبة من حالة التماثل الحصول على قيمة الوسط الحسابي ، حيث أمكن الحصول على قيمة Me , Mo ، حيث Me = 52 ، Mo = 53 ، جد الوسط الحسابي مبين نوع الالتقاء.

$$\bar{x} = \frac{3\,Me - Mo}{2} = \frac{3(52) - 53}{2} = 51.5$$



$$\bar{x} < Me < Mo$$

منحنى ملتوي التواء سالب من جهة اليسار

مادة الإحصاء

الفصل الرابع

مقاييس التشتت

مقدمة :

وهي نوع آخر من المقاييس الإحصائية التي تصف المجموعات الإحصائية أو التوزيعات التكرارية في المقاييس التي سبق ذكرها ، فلو فرضنا لدينا الراتب الشهري لخمسة موظفين وكان بالصورة التالية :

100 , 17 , 21 , 22 , 25 فالوسط الحسابي لهذه الرواتب والذي هو عبارة عن :

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{25+22+\cdots+100}{5} = 37$$

هذا المتوسط الذي يستخدم لتمثيل الرواتب لا يمثلها تمثيلاً صحيحاً لهذا السبب سوف نستخدم مقاييس أخرى ، وهي مقايس التشتت والهدف من دراسة التشتت هو تكوين فكرة عن مدى تجانس قيم مجموعة من المفردات ، وهذا يعني أن دراسة التشتت أمر مفيد في إجراء المقارنة بين مجموعتين أو أكثر من البيانات ، وكلما كان مقياس التشتت كبيراً دل ذلك على عدم التجانس بين القيم ويكون مقياس التشتت صغيرا عندما يكون الاختلاف من بين قيم المشاهدات قليل ، ولمقياس التشتت أهمية أيضاً في وصف التوزيعات ومقارنتها مع بعضها.

ملاحظة :

قد يتساوى الوسط الحسابي لمجموعتين من القيم بينما يختلف مدى انتشار القيم في المجموعة الأولى عن المجموعة الثانية كما مبين أدناه :

إذا كانت قيم المجموعة الأولى هي : 17 , 20 , 23 , 18 , 12 , 21 , 22

وكانت قيم المجموعة الثانية هي : 35 , 10 , 7 , 5 , 45 , 20 , 13

فالوسط الحسابي لكلا المجموعتين مساوي(20) ولكن المجموعة الأولى متجانسة أكثر من الثانية.

أهم مقاييس التشتت :

أولاً : مقاييس التشتت المطلقة :

وهي التي تقيس تشتت المفردات بدلالة الوحدات المطلقة المستخدمة في قياس الظاهرة مثل فلس ، دينار ، درجة ، وزن ، كثافة ... الخ ، ومنها :

أ- مقاييس تقيس تشتت المفردات بينها ومنها على سبيل المثال :

1- المدى.

ب- مقاييس تقيس تشتت المفردات حول الوسط الحسابي ومنها :

1- الانحراف المتوسط. 2- التباين والانحراف المعياري.

ثانياً : مقاييس التشتت النسبية :

وهي التي تقيس تشتت المفردات بدلالة النسب المئوية وأهمها ما يسمى بمعامل الاختلاف.

أولاً : مقاييس التشتت المطلقة :

1- المدى : في حالة البيانات غير المبوبة :

يعتبر المدى أبسط أنواع مقاييس التشتت المطلقة ويعرف بأنه الفرق بين أكبر قيمة في مجموعة البيانات وأصغر قيمة حيث :

$$R = x_L - x_s$$

R = يمثل مقياس المدى

X_L:يمثل أكبر قيمة في مجموعة البيانات.

X_s : يمثل أصغر قيمة في مجموعة البيانات.

مثال 1 : أوجد المدى للقيم التالية :

X_i : 2 , 10 , 12 , 15 , 22